



*М.Ш.Мамаюсупов*



*Иманалиев М.И.*

# Жогорку математика боюнча окума

1-бөлүк  
Электрондук окуу китеп

- САН МОДЕЛДЕРИ
- ВЕКТОРДУК АЛГЕБРАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ
- ТҮЗ ЖАНА ТЕГИЗДИК
- ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ИЙРИЛЕР ЖАНА БЕТТЕР
- МАТРИЦАЛАР, АНЫКТАГЫЧТАР ЖАНА АЛАРДЫН КОЛДОНУЛУШТАРЫ

Ош-2022

УДК 51  
ББК 22.11  
М 22

Китеп Ош мамлекеттик университетинин «Жогорку математика» кафедрасында даярдалып, Билим берүү жана Илим министрлигинин № 99|1 (24.02.12) буйругу менен расмий окуу китеби катарында таанылган.

Редактору: п.и.к.,  
Ош МУнун профессору Алтыбаева М.

Рецензенттер: п.и.д., профессор Байсалов Ж.У., ф.-м.и.д.,  
профессор Асанов А., п.и.к., доцент Мунапысова Г.Т.

Окумалардын топтомун жазган Мамаюсупов М. Ш.  
М 22 Жогорку математика боюнча окума Электрондук окуу китеби. –  
Ош: 2014, 2018, 2022– 335 б.

ISBN 978 – 9967 – 22 – 817 - 2

«Жогорку математика боюнча окума» электрондук окуу китебинин 1- бөлүгү, жогорку окуу жайларда окутулуучу матанализ, аналитикалык геометрия, сызыктуу алгебра, жогорку жана колдонмо математика сабактарын өздөштүрүүчү студенттерге жана окутуучуларга арналган. [электрондук китепти ОшМУ нун жана www.okuma.kg](http://www.okuma.kg) сайттарынан окууга болот.

Сын-пикирлерди төмөндөгү дарекке жөнөтүңүздөр: 723500, Ош ш., Ленин к., 331, Ош МУнун жогорку математика кафедрасы [mamaiusupov.m@gmail.com](mailto:mamaiusupov.m@gmail.com)

М 1602010000 – 10

УДК 51

ISBN 978 – 9967 – 22 – 817 – 2

ББК 22.11

Мамаюсупов М.Ш.,

2014, 2018, 2022

## ЛАТЫН АЛФАВИТИ

Тамгалар	Аталышы	Тамгалар	Аталышы	Тамгалар	Аталышы	Тамгалар	Аталышы
<i>A a</i>	а	<i>H h</i>	аш	<i>N n</i>	эн	<i>U u</i>	у
<i>B b</i>	бэ	<i>I i</i>	и	<i>O o</i>	о	<i>V v</i>	вэ
<i>C c</i>	це	<i>J j</i>	йот	<i>P p</i>	пэ	<i>W w</i>	дубль-бэ
<i>D d</i>	дэ	<i>K k</i>	ка	<i>Q q</i>	ку	<i>X x</i>	икс
<i>E e</i>	э	<i>L l</i>	эль	<i>R r</i>	эр	<i>Y y</i>	ýгрек
<i>F f</i>	эф	<i>M m</i>	эм	<i>S s</i>	эс	<i>Z z</i>	зэт
<i>G g</i>	гэ			<i>T t</i>	тэ		

## ГРЕК АЛФАВИТИ

Тамгалар	Аталышы	Тамгалар	Аталышы	Тамгалар	Аталышы	Тамгалар	Аталышы
<i>A α</i>	áльфа	<i>Η η</i>	эта	<i>Ν ν</i>	ню	<i>Τ τ</i>	та́у
<i>B β</i>	бéта	<i>Θ θ</i>	тэ́та	<i>Ξ ξ</i>	кси	<i>Φ φ</i>	фи
<i>Γ γ</i>	га́мма	<i>Ι ι</i>	иота	<i>Ο ο</i>	óмикрон	<i>Χ χ</i>	хи
<i>Δ δ</i>	де́льта	<i>Κ κ</i>	ка́ппа	<i>Π π</i>	пи	<i>Ψ ψ</i>	пси
<i>E ε</i>	э́псилон	<i>Λ λ</i>	ла́мбда	<i>Ρ ρ</i>	ро	<i>Ω ω</i>	омéга
<i>Z ζ</i>	дзéта	<i>Μ μ</i>	мю	<i>Σ σ</i>	сúгма		

# МАЗМУНУ

## Оглавление

### I ГЛАВА. САН МОДЕЛДЕРИ

§ 1.1 Чыныгы сандардын мейкиндиги .....	10
<b>1.1.1 Натуралдык жана бүтүн сандар</b> .....	10
1.1.2 Математикалык индукция жана дедукция усулдары. Дискреттик математика түшүнүгү. Комбинаториканын элементтери .....	14
2. Дискреттик математика түшүнүгү.....	18
3. Комбинаториканын элементтери.....	18
Көнүгүү .....	29
<b>1.1.3 Рационалдык сандардын мейкиндиги</b> .....	31
<b>1.1.4 Рационалдык сандарды кеңейтүү. Чыныгы сандардын мейкиндиги</b> .....	38
<b>1.1.5 Удаалаштыктардын пределин табуу ыкмалары</b> .....	43
<b>1.1.6 <math>e</math> - саны</b> .....	49
1. Көнүгүүлөр .....	57
§ 1.2 Көп өлчөмдүү мейкиндиктердин сандык моделдерин түзүү.....	59
<b>1.2.1 Эки өлчөмдүү <math>R^2</math> мейкиндиги</b> .....	59
<b>1.2.2 <math>R^2</math> мейкиндигинде пределди түшүндүрүү</b> .....	63
<b>1.2.3 <math>R^3</math> мейкиндигинде сандарды жайгаштыруу</b> .....	70
<b>1.2.4 <math>R^3</math> мейкиндигиндеги удаалаштыктардын предели</b> .....	74
<b>1.2.5 <math>R^n</math> мейкиндигин сандык моделин түзүү</b> .....	78
2. Мисалдар.....	82
§1.3 Мейкиндик чекиттерин полярдык, цилиндрдик, сфералык координаталар менен даректештирүү.....	87
<b>1.3.1 Полярдык координаталар системасы</b> .....	87
<b>1.3.2 Цилиндрдик координаталар</b> .....	90
<b>1.3.3 Сфералык координаталар</b> .....	91
2. Көнүгүүлөр .....	92
§ 1.4 Комплекстик сандар.....	93
<b>1.4.1 Комплекстик сандар түшүнүгү</b> .....	93
<b>1.4.2 Комплекстик сандарды геометриялык сүрөттөө жана тригонометриялык формада жазуу</b> .....	96
Мисалдар жана көнүгүүлөр.....	100
§ 1.5 Сандарды аныктагыч көрүнүштө жазуу .....	105
<b>1.5.1 Аныктагыч түшүнүгү</b> .....	105
<b>1.5.2 Аныктагычты эсептөө эрежелери</b> .....	108
4. Мисалдар жана көнүгүүлөр.....	115
II ГЛАВА. ВЕКТОРДУК АЛГЕБРАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ .....	121
§ 2.1 Векторлор жана алардын мейкиндиктеги сүрөттөлүшү .....	121
<b>2.1.1 Вектор түшүнүгү</b> .....	121
<b>2.1.2 Векторлор менен аткарылуучу сызыктуу амалдар</b> .....	124
<b>2.1.3 Сандык мейкиндиктерде векторлорду сүрөттөө</b> .....	128
<b>2.1.4 Векторлор менен жүргүзүлүүчү сызыктуу амалдарды</b> .....	132
<b>координаталары аркылуу туюнтуу</b> .....	132
<b>2.1.5 Векторлордун сан огундагы проекциясы</b> .....	133

§2.2 Векторлорду скалярдык көбөйтүү .....	135
2.2.1 Скалярдык көбөйтүү түшүнүгү.....	135
2.2.2 Скалярдык көбөйтүүнүн касиеттери .....	137
2.2.3 Векторлорду координаталары боюнча скалярдык көбөйтүү .....	138
2.2.4 Векторлордун арасындагы бурчтун косинусу. Багыттоочу косинустар .....	140
5. Мисалдар.....	143
§ 2.3 Вектордук көбөйтүү .....	149
2.3.1 Вектордук көбөйтүүнүн аныктамасы .....	149
2.3.2 Вектордук көбөйтүүнүн касиеттери .....	151
2.3.3 Вектордук көбөйтүүнү координаталары боюнча аткаруу .....	154
6. Мисалдар.....	154
§ 2.4 Векторлорду аралаш көбөйтүү .....	157
2.4.1 Аралаш көбөйтүү түшүнүгү жана аны геометриялык чечмелөө .....	157
2.4.2 Аралаш көбөйтүүнү координаталар аркылуу жүргүзүү .....	159
7. Мисалдар.....	160
2.4.3 Кош вектордук көбөйтүү .....	162
III ГЛАВА. ТҮЗ ЖАНА ТЕГИЗДИК .....	166
§3.1 Тегиздикте жайгашкан түздөр .....	166
3.1.1 Түздүн нормалдык жана жалпы теңдемелери.....	166
3.1.2 Тегиздикте берилген чекит аркылуу өтүүчү түздүн, берилген багытка карата теңдемелери .....	170
3.1.3 Тегиздикте берилген түздөн чекитке чейинки аралык.....	172
3.1.4 Эки түздүн арасындагы бурч.....	174
8. Мисалдар.....	175
3.1.5 Полярдык координаталар системасындагы түздүн теңдемеси .....	183
§3.2 Тегиздик .....	184
3.2.1 Тегиздиктин нормалдык жана жалпы теңдемеси .....	184
3.2.2 Берилген чекит аркылуу өтүүчү тегиздиктин, берилген багыттарга карата теңдемесин түзүү.....	187
3.2.3 Чекиттен тегиздикке чейинки аралык.....	189
3.2.4 Тегиздиктердин арасындагы бурч.....	190
§3.3 Мейкиндиктеги түздөр .....	191
3.3.1 Түздүн жалпы теңдемеси .....	191
3.3.2 Мейкиндикте берилген чекитке жана багытка карата түздүн теңдемелерин түзүү .....	192
3.3.3 Түздүн теңдемелерин каноникалык көрүнүшкө келтирүү.....	194
3.3.4 Мейкиндикте түз менен тегиздиктин жайгашуу абалдары.....	196
9. Мисалдар.....	198
IV ГЛАВА. ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ИЙРИЛЕР ЖАНА БЕТТЕР .....	210
§ 4.1 Тегиздиктеги координаталар системасын өзгөртүп түзүү .....	210
4.1.1 Параллель которуу жана буруу .....	210
§ 4.2 Экинчи тартиптеги ийрилер.....	215
4.2.1 Экинчи тартиптеги көп мүчөлөрдү өзгөртүп түзүү .....	216
4.2.2 Экинчи тартиптеги ийрилердин каноникалык теңдемелери .....	218
4.2.3 Эллипс .....	221
4.2.4 Гипербола .....	224
4.2.5 Парабола .....	228
4.2.6 Эллипс, гипербола, парабола ийрилерине жүргүзүлгөн жаныма түздөр ....	230
4.2.7 Эллипстин, гиперболанын, параболанын айрым колдонулуштары.....	232
5. Мисалдар жана көнүгүүлөр.....	235
§ 4.3 Экинчи тартиптеги беттер .....	243
4.3.1 Экинчи тартиптеги беттердин жалпы теңдемеси жана аны өзгөртүп түзүү..	243

4.3.2	Конустук беттер .....	245
4.3.3	Цилиндрдик беттер .....	246
4.3.4	Айлануудан пайда болгон беттер .....	248
4.3.5	Гиперболалык параболоид .....	254
6.	Мисалдар жана көнүгүүлөр.....	255
V	ГЛАВА. МАТРИЦАЛАР, АНЫКТАГЫЧТАР ЖАНА	258
	АЛАРДЫН КОЛДОНУЛУШТАРЫ.....	258
§ 5.1	Аныктагычтарды түзүүдө орун алмаштыруулардын колдонулушу .....	258
§5.2	Матрицалар жана алар менен болгон амалдар .....	262
5.2.1	Матрица түшүнүгү. Матрицаларды кошуу жана кемитүү.....	262
5.2.2	Матрицаларды санга көбөйтүү жана жолчолордун сызыктуу мейкиндиги ..	265
5.2.3	Матрицаларды көбөйтүү .....	268
§5.3	Матрицаларды өзгөртүп түзүү .....	270
5.3.1	Матрицаларды транспонирлөө .....	270
5.3.2	Матрицаларды элементардык өзгөртүү.....	272
7.	Мисалдар .....	277
§5.4	Матрицаларды сандарга чагылтып салыштыруу жана аларды колдонуу .....	282
5.4.1	Матрицанын аныктагычы.....	282
5.4.2	Тескери матрицаны табуу ыкмалары .....	286
5.4.3	Матрицанын рангы .....	293
8.	Мисалдар .....	297
§5.5	Сызыктуу теңдемелер системасы .....	304
5.5.1	Теңдемелер системасы түшүнүгү .....	304
5.5.2	$n \neq m$ учурдагы теңдемелер системасын чечимдери. Жордан –Гаусстун ыкмасы .....	309
5.5.3	$n = m$ болгон учур. Крамердин эрежеси .....	312
9.	Мисалдар .....	315
§5.6	Бир тектүү сызыктуу теңдемелер системасы .....	321
5.6.1	Бир тектүү теңдемелер системасын чечимдери .....	321
5.6.2	Бир тектүү теңдемелер системасын чечимдеринин сызыктуу мейкиндиги ..	323
	Көнүгүүлөр .....	328

*Аалам бир чоң ыйык китеп жана ал математиканын тилинде жазылган, анын тамгалары математикалык белгилер, фигуралар болушуп, аларсыз ааламды адам тилинде түшүнүү мүмкүн эмес.*

**Галилей**

## **КИРИШ СӨЗ**

Кандай гана кесип болбосун, аны толук таанып өздөштүрүү үчүн, ошол кесиптин ишмердик чөйрөсү баяндалган тилди билүү зарыл. Мисалы ат араба минген Пушкиндин доорунда жазылган чыгармаларда, адамдардын өз-ара сезимдерине чоң маани берилип, шедевр чыгармаларды жаратууга орустун 32 тамгалуу жазма тили жетиштүү болгон. Бирок, ошол мезгилде деле көпүрө, чиркөө, кеме, имарат ж.б. курууда 32 жазма тамгалардан башка да, эсеп-кысап жазылган математикалык тилдин элементтери колдонулуп келген. Айрыкча инженердик кесиптердин ишмердик чөйрөсүндө, негизинен математикалык тил колдонулуп, алар ойроп тапкан ачылыштарын (Ньютон, Лейбниц, Ом ж.б.) математикалык тилде жазып түшүндүрүшкөн. Илимдин доору өкүм сүргөн 21-кылымда, ат ордуна электрондор жумшалып, жердеги гана эмес бүтүндөй галлактикалык проблемаларга кол сунган адамзат, 36 тамгалуу эне тилине караганда, математикалык жана компьютердик тилдерди жогору коюп, аларды кесиптер менен чөйрө таануунун универсалдык тили катарында кабыл алышты. Демек жаш кадрларды даярдоодо, кесиптик чөйрөлөр жазылган тилдерди жана анын сүйлөмдөрүн окуп жана жаза билгенге үйрөтүүнү башкы орунга коюу керек. Мисалы, дүйнөлүк практикада бардык кесиптерге киришүүдөн мурда, математиканы ошол кесипти таануучу тил же инструменти катарында окутушат. Ошондуктан, М. Мамаюсупов математиканы кыргыз тилин толуктоочу тил катарында окутуу усулун демилгелеп, “Математиканы чөйрө кубулуштарын таануунун тили же каражаты катарында окутуу маселелери”-деген илимий-усулдук багытты (КР Бил.бер. Илим мин. Катталган №0007191, 01.01.2016) жетектеп: ар бир математикалык материалды, чөйрөдөгү кайсы бир процесстин математикалык тилдеги жазылышы катарында окуучуларга түшүндүрүү, б.а. математиканы чөйрө менен кесиптерди таануунун тили катарында окутуу усулун сунуштады. Ошондой эле, өз мезгилинде байыркы ата-бабаларыбыз, башка элдерге караганда математикалык тилди жакшы билген үчүн, дүйнөнү дүңгүрөтө империя кура алганына сыймыктаып, жаштарыбыз математиканы башка элдик деп жерибей, өзүнүкүндөй өздөштүрсүн деген максатта, математиканын толук курсун камтыган “Жогорку математика боюнча окума” (1-5) томдуктары кыргыз тилинде жазылды.

Анткени Кыргыз мамлекеттүүлүгүн бекемдөө жана эгемендүү өсүп өнүгүүсүн камсыз кылуу маселеси, келечек жаштарын адыңкы технологияларга таянган кесиптерди өздөштүрүүсүнө жана жашоо тиричиликте колдоно билүүсүнө көз каранды болору белгилүү. Ошондуктан мамлекеттин көз каранды эместигин деңгээлин, анын өз тилиндеги эгемендүү илим базасынын түзүлүү көрсөткүчү менен ченеп келишет. Анткени мамлекеттер арасындагы жашоо атаандаштыгы, илимий-техникалык ачылыштар менен өндүрүш технологияларын жашыруун кармоого мажбурлайт. Ал эми, эгемендүү илим базасын болсо, математикалык тилде гана жазууга жана адамча окуп түшүнүүгө болот.

Жогорку математика боюнча лекциялар топтому катарында түзүлгөн 5 томдуктар 20 главаларга бөлүнүп, анын 17 – 19 главалары Кыргыз – Түрк Манас университетинин профессорлору ф.м.-и.к. Р.Рафатов, ф.м.-и.д. А.Асанов менен авторлошуп жазылды. Окуу китептеринде жогорку математика боюнча теориялар практикалык мисалдар менен бышыкталып, студенттердин өз алдынча окуп өздөштүрүү ыңгайына көңүл бурулуп, суроо туулбай турган деңгээлге чейин жеткиликтүү баяндоого аракет жасалып, математиканы чөйрөнү жана анын кубулуштарын таануунун тили катарында окутуп үйрөтүүгө кадам ташталган.

“Жогорку математика боюнча окума” окуу китептеринин 5 томдуктарын жазууда, В.И.Смирновдун жана Г.М.Фихтенгольцтун томдуктары жана М.Л.Краснов ж.б. окумуштуулар тобу түзгөн “ВСЯ высшая математика” 1 – 5 томдуктары өрнөк катары алынып, дүйнөлүк математикада окшош баяндалган түшүнүктөр менен жалпы белгилөөлөр жана айрым ыкмалар өзгөртүлбөй берилген. Бирок, биздин окумалардын топтомун, аталган китептердин тике котормосу катарында кароого болбойт, анткени китептин жалпы мазмуну авторлордун көп жылдык окутуу тажрыйбасынын негизиндеги жеке көз караштары менен жазылып, математика таануунун тили же каражаты катарында түшүндүрүлүп, башка тилдеги бир да китептерде жолукпаган окутуу жана баяндоо усулдары иштелип чыккан.

Окумалар топтому, кыргыз элинин белгилүү мекенчил математик окумуштуулары Р.Усубакунов, Ж.Саламатов, Айылчиев, И.Бекбоев, М.Назаров, С.Каримов, Р.Рафатов, А.Бөрүбаев, Б.Шабыкеев, К.Бараталиев, А.Асанов тарабынан жазылган окуу китептерден таасири менен жазылып, алар баштаган ишти улантуу болуп эсептелет. Айрыкча, кыргыз болбосо да кыргыз тилин грамматикасына чейин өздөштүрүп, математика боюнча кыргыз тилиндеги окуулуктарды жазышкан жана жазууга үндөшкөн Дж.Мустафин, К.Исхаков, А.Боташев, Р.Рафатов, Э.Атаманов өңдүү окумуштуулардын салымын унутууга болбойт. Китептерди жазууда Дж.Мустафин, М.Назаров, С.Каримов, И.Карасаев, Т.Кулмаматов, Т. Сманов сыяктуу Ош пединститутун (азыркы ОшМУ) математиктеринин кыргыз тилиндеги кол жазмаларындагы баяндоо ыкмалар жана терминдер пайдаланылды.

Ошентип алгачкы жолу, жогорку математика боюнча жетишерлик толукталган көлөмдөгү маалыматтарды камтып, 5 томдордон турган кыргыз тилиндеги окумалар



топтому, эгемендүү өлкөбүздүн эгемендүү илимин түптөөгө салым кошуу менен, кыргыз мамлекеттүүлүгүн бекемдөөгө негиз түзөт деп ишенебиз.

Китептердин кол жазмасын окуп чыгып, сын – пикирлерин жана сунуштарын билдиришкен п.и.д., профессорлор Ж.Байсаловго (Арабаев университети), Т. Сияевке (С.Нааматов ат. НМУ), С.К.Калдыбаевке (С.Нааматов ат. НМУ), п.и.к, доценттер Г.Т.Мунапысовага (КМУУ), Б.М.Биймурсаевага (С.Нааматов ат. НМУ), ф.-м.и.к., доцент М.Алыбаевке (КМУУ), ф.-м.и.д., профессорлор К.Алыбаевке (ЖАМУ), Ж.Сатаровго (ОшТУ), А.Сопуевке (ОшМУ), И.Ташполотовко (ОшМУ), ф.-м.и.к, коомдук ишмер Ө.Ш.Мамаюсуповго чын ыкластан ыраазылык билдиремин. Китептептерди китеп абалына келтирүүгө чоң салымын кошуп, китептерди редакциялашкан п.и.к., ОшМУ нун профессору – М.Алтыбаевага, ардагер математик – М.Абдиджалиловго, п.и.к., доцент – А.Аттокуровага өзгөчө сый – урмат көрсөтөмүн. Китептердин мукабасына, математика багыты боюнча Кыргызстанда алгачкы илимдин докторлору болушкан кыргыз математиктери М. И. Иманалиевдин, С. Каримовдун, А. И. Боташевдин, А. А. Бүрүбаевдин, К. Алымкуловдун сүрөттөрү коюлган.

Китептер боюнча ойлорунуздарды жана сын – пикирлериңиздерди [mamaiusupov.m@gmail.com](mailto:mamaiusupov.m@gmail.com) дарегине жөнөтсөнүздөр болот.

**Мамаюсупов М.Ш.**

# I ГЛАВА. САН МОДЕЛДЕРИ

## § 1.1 Чыныгы сандардын мейкиндиги

### 1.1.1 Натуралдык жана бүтүн сандар

Чөйрө таануу процессинде колдонулган эң алгачкы белги – символдор же модел-тамгалар катарында сандарды атоого болот. Сандардын жардамы менен нерселерди өлчөмүнө, жайгашуу аралыгына, санына карата айырмалап тааныйбыз.

*Санак муктаждыктарын канааттандырууга керектелген сандарды натуралдык сандар деп атап, бардык натуралдык сандардын көптүгүн  $N$  тамгасы менен белгилейбиз.*

Натуралдык сандардын көптүгү өсүү тартибинде

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n, \dots\}$$

көрүнүштө жазылып,  $n$  тамгасы менен эркин тандалган натуралдык сан белгиленет. Натуралдык сандарды мындай символдор менен белгилөө араб математиктери тарабынан кабыл алынган (Индиядан арабдар аркылуу Европага тараган деген божомолдор да бар). Айрым учурларда Рим цифралары да колдонулат:

I, II, III, IV, V, ..., X, ..., XXI, ... - Рим белгилөөсүндө,

1, 2, 3, 4, 5, ..., 10, ..., 21, ... - Араб белгилөөсүндө.

Теориялык жактан санактын жүрүшүн чексизге чейин уланта берүүгө болгондуктан,  $N$  көптүгү да чексиз көп элементтерден же сандардан турат. Иш жүзүндө чексиз санакты аткаруу мүмкүн эмес, ошондуктан чексиз деп эсептелген натуралдык санды « $\infty$ » символу менен белгилейбиз. Натуралдык сандар адамдардын кыялында гана жашоочу белги – символдор болуп, аларды өзгөртүп жазуу же башкача белгилөө адамдардын эркинен көз каранды. Ошондой болсо да, жалпы бирдейликти сактоо максатында натуралдык сандарды араб цифраларында жазуу эрежеси кабыл алынган. Натуралдык сандарды 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифраларын жардамы менен ондук системада же ар бир он сандан кийин, санакты жаңылоо менен толук жазып көрсөтүүгө болот.

**Мисалы:** 45 эки орундуу натуралдык санын белгилөө үчүн 4 жолу эсепти жаңылоочу ондук жана 5 санактары колдонулат  $45 = 4 \cdot 10 + 5$ . үч орундуу 397 саны  $397 = 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7$  көрүнүштөгү мааниде түшүнүлүп, 3 жолу  $10^2 = 100$  санагы, 9 жолу 10 санагы жана бир жолу 7 санагы, баары кошулуп 397 саны пайда болот деп эсептелет. Ошондой эле  $5925 = 5 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$  төрт орундуу сан,  $78763 = 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3$  беш орундуу сан болуп, жалпы учурда  $m$  орундуу натуралдык санды жазуу эрежеси

$$C_1 C_2 C_3 \dots C_m = C_1 \cdot 10^{m-1} + C_2 \cdot 10^{m-2} + C_3 \cdot 10^{m-3} + \dots + C_{m-1} \cdot 10 + C_m$$

көрүнүштө болот. Бул жерде  $C_i$  деп 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифраларынын бири ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) алынат. Ошентип көрсөтүлгөн он цифраларды бирдик, ондук, жүздүк, миңдик, ...,  $10^{m-1}$  дик, ... тартиптеги орундарга коюу менен бардык натуралдык сандарды жазууга болот. Жогорудагы мисалдарда 45 санында 4 - ондук, 5 - бирдик; 397 санында 3 - жүздүк, 9 - ондук, 7 - бирдик; 5925 санында 5 - миңдик, 9 - жүздүк, 2 - ондук, 5 - бирдик; 78763 санында 7 - он миңдик, 8 - миңдик, 7 - жүздүк, 6 - ондук, 3 - бирдик орундарда жайгашышкан; Ал эми  $C_1 C_2 C_3 \dots C_m$  санында  $C_1 - 10^{m-1}$  дик,  $C_2 - 10^{m-2}$  дик, ...,  $C_{m-1} -$  ондук,  $C_m -$  бирдик орундарда жайгашкан болушат.

Адамдын колдорундагы манжалардын саны он болуп, саноого ыңгайлуу болгондуктан ондук система тандалып алынган. Ошондой болсо да, дүйнө элдеринде эсептөөнүн жетилик, он экилик, жыйырмалык, кырктык ж.б. системалары колдонулуп жүргөн фактылар катарында жуманын жети күндөн, кырк чоро, кырктык, жыйырмалык сыяктуу түшүнүктөр сакталып калганын айтууга болот.

**Мисалы:** Жетилик системада 10 деп 7 санын түшүнүп, ар бир 7 жолку санактан кийин жаңы санак баштайбыз.

Жетиликте: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, . . . ,

ондукта: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, . . . .

Экилик системада ар бир эки 0, 1 деген санактарынан кийин жаңы санак башталып “ажыратуу”, “туташтыруу” абалдарын элестеткендиктен, электр тогунун жардамы менен экилик системада компьютердик эсептөө технологиялары түзүлүп, натыйжасы таблога 10

дук системада жазылып чыгат. Ошондой эле жарыктын “өчүү”, “жануу” кубулуштарына негизделип, лазердик эсептөө технологиялары келип чыккан.

Экиликте: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, . . . ,  
ондукта: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, . . . .

Бул учурларда натуралдык санды жазып көрсөтүү эрежелери да алмашат. Жетилик системада бирдик, ондук ж.б. түшүнүктөрүн ордуна бирдик, жетилик,  $7^2$  тык,  $7^3$  тук ж.б. түшүнүктөрү келип чыгат.

**Мисалы:** Ондук системадагы  $75 = 7 \cdot 10 + 5$  саны, жетилик системада 135 деп жазылып,  $135 = 1 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 5$  көрүнүштө түшүндүрүлөт. Ондук системадагы бирдик менен жазылган 9 саны, экилик системада 1001 түрүндө жазылат же  $1001 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$  санында бирдик, 2 лик,  $2^2$  тык,  $2^3$  тук орундарда жайгашкан 0, 1 цифраларынан куралган миндикке ээ сан катарында түшүнүлөт.

Эсептөө системаларын кандай тандаганыбызга карабай санак тартиби сакталып, бардык эсептөө системаларында нерселердин саны өзгөрбөйт. Ошондой болсо да расмий математикада ондук эсептөө системасын колдонуу макулдашылган.

**1.1.1 Аныктама.** *А көптүгүн элементтерин саны анын кубаты деп аталып,  $\mu(A)$  символу менен белгиленет. Тең кубаттуу көптүктөр эквиваленттүү көптүктөр болушат. Эквиваленттүүлүк “ $\sim$ ” тамгасы менен белгиленет.*

Натуралдык сандардын көптүгү чексиз көп элементтерден турганына карабастан, эсептөө иретин бузбастан чексизге чейин уланта берүү мүмкүнчүлүгү сакталгандыктан, теориялык жактан аны эсептеп чыгууга болот деп ойлоп, кубатын “ $\infty$ ” деп атабай, «*санактык*» же «*эсептелүүчү*» кубатка ээ деп, кубатын “ $a$ ” символу менен белгилейбиз, же  $\mu(N) = a$  көрүнүштө жазабыз.  $N$  натуралдык сандардын көптүгүндө кошуу, көбөйтүү амалдары гана толугу менен аткарылат ( $+$ ,  $\times$ ):

$\forall n, m \in N: n + m = k \in N, n \cdot m = p \in N$ . Бирок кемитүү, бөлүү амалдары ар дайым эле аткарыла бербейт б.а., натуралдык сандардын айырмасы жана тийиндиси ар дайым эле натуралдык сан боло бербейт.

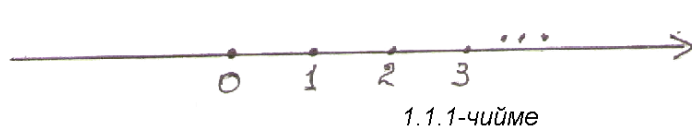
**Мисалы:**  $4, 7 \in N$ , бирок  $4 - 7 = -3 \notin N$  жана  $\frac{4}{7} \notin N$ .

Айрым учурларда 0 санын да натуралдык сандарга кошуп жазышып,  $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  көрүнүштө жазышат.

**1.1.2 Аныктама.** Эсептөө башталышы жана чен бирдиги бар багытталган түз сызык сан огу деп аталат.

(Эсептөө башталмасы катарында алынган 0 чекитин байкочу турган чекит катары түшүнүүгө болот. Анткени сан огундагы чекиттер 0 чекитине салыштырмалуу таанылат.)

Сан огун чен бирдиги катарында кыялыбызда «узундугу бир» деп ойлогон кесиндини алып, аны эсептөө башталмасы деп алынган 0 чекитинен оң багытка (түздүн багыты) карап түзгө коюп ченеп кетүү менен, кесиндилердин учтарына туура келген бардык чекиттерди натуралдык сандар деп түшүнөбүз (1.1.1-чийме).



Болжолдуу тандалган «бир» аралыгы ар кимдин кыялында ар башка

тандалгандыктан, «бир» узундуктагы кесиндилердин учтарындагы чекиттер деп эсептелген натуралдык сандар, ар түрдүү аралыкта обочолонгон чекиттер менен сүрөттөлүп калат. Ошондуктан «бир» ченин аралык, салмак, убакыт ж.б. чоңдуктары үчүн ченөө жалпылыгын сактоочу эталон - үлгүлөрү кабыл алынган (мм., см, гр, сек, ж.б.у.с.). Мындан ары «бир» аралыгы деп эталон - үлгүдө кабыл алынган ченди түшүнөбүз.

Натуралдык сандар оң багыттагы өсүү тартибиндеги санак жүргүзүү муктаждыгын канааттандырууга ылайыкташкан. Бирок тескери санакты жүргүзүүгө ыңгайсыз, ошондуктан терс белгидеги натуралдык сандар түшүнүгүн киргизүү менен, оң жана тескери же эки багыттуу санакты ишке ашырууга дарамети жеткен сандардын көптүгүн түзөбүз. Аны бүтүн сандардын көптүгү деп  $Z$  тамгасы менен белгилейбиз жана

$$Z = \{ \dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots \}$$

көрүнүштө жазабыз жана  $N \subset Z$  болорун көрөбүз. Мында  $n$  эркин алынган бүтүн санды түшүндүрөт.

Бүтүн сандардын көптүгүндө натуралдык сандардын көптүгүнө караганда эки эсе көп элементтер бар болгондой көрүнгөнү менен,

теориялык жактан  $N$ ,  $Z$  көптүктөрүн элементтерин саны бирдей болуп, тең кубаттуу же эквиваленттүү көптүктөр болушат.

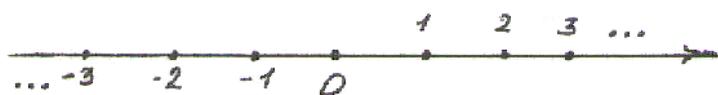
▷ Чынында  $Z$  көптүгүн оң жана терс натуралдык сандардын көптүктөрүнө ажыратып:

$$N_+ = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\},$$

$N_- = \{-1, -2, -3, \dots, -n, \dots\}$  алардын ар бири санактык, б.а.  $a$  кубатындагы көптүктөр экенине ишенебиз.  $Z = N_+ \cup N_-$  болгондуктан, саноонун чексиз жүрүшүндө  $N_+$  көптүгүн эсептеп бүткөн соң,  $N_-$  көптүгүн эсептеп аягына чыгарууга болот деген теориялык тыянакка таянып,  $Z$  көптүгүн элементтерин да санап чыгууга болот деген бүтүмгө келебиз. Ошентип  $Z$  көптүгү санактык  $a$  кубатына ээ жана  $N$  көптүгүнө эквиваленттүү  $\mu(Z) = \mu(N) = a. \Leftrightarrow N \sim Z$ .

$Z$  бүтүн сандардын көптүгүндө кошуу, кемитүү, көбөйтүү  $Z$  ("+", "-", "×") амалдары аткарылат. ◁

Демек  $Z$  көптүгүндө бүтүн сандарды арифметикалык кошуу, көбөйтүү, кемитүү амалдарын натыйжасы да бүтүн сан болот. Терс багытка карап кеткен чексиздиктеги терс бүтүн сан " $-\infty$ " деп белгиленет.



1.1.2-чийме

Бүтүн сандарды сан огуна бири – биринен бир аралыгында обочо жайланышкан чекиттер

катарында сүрөттөөгө болот (1.1.2-чийме).

### 1.1.2 Математикалык индукция жана дедукция усулдары.

Дискреттик математика түшүнүгү. Комбинаториканын элементтери

Натуралдык жана бүтүн сандардын көптүгү чексиз сандардан тургандыктан, алар менен болгон амалдарды жана айрым касиеттерди бардык сандар үчүн толук текшерип чыгуу мүмкүн эмес. Ошондой болсо да дедуктивдик жана индуктивдик усулдарга таянып, ал касиеттерди бардык сандар үчүн туура же ката деп болжолдоп, кыялыбызда гана ишенип келебиз.

*Дедукция усулу деп, жалпы бүтүмдөрдүн негизинде бир жеке бүтүмгө келүүнү түшүнөбүз.*

**Мисалы:** «Аягы 0 же 5 цифралары менен бүткөн сан сөзсүз 5 ке бөлүнөт» деген жалпы тыянактан, «1725 саны 5 ке бөлүнөт» деген жеке бир бүтүмгө келебиз жана анын чын же жалган экенин текшербестен эле ишенебиз.

*Индукция болсо, көптөгөн жекече текшерилген бүтүмдөрдүн негизинде жалпы бир бүтүм чыгаруу ыкмасы болот.* Мындайча айтканда 5, 10, 15, 20, ..., 625 сандарын ар биринин 5 ке бөлүнөрүн текшерип, тууралыгына ишенип, «бардык аягы 0 же 5 цифралары менен бүткөн сандар, сөзсүз 5 ке бөлүнөт» деген бир жалпы бүтүмгө келебиз.

Индукция усулу толук жана толук эмес индукция деп аталган эки түргө бөлүнөт. Толук индукцияда мүмкүн болгон бардык чектүү сандагы бүтүмдөрдү өз - өзүнчө бөлүп, текшерип далилдөөнүн негизинде гана, аларды жалпылоочу бир корутунду - бүтүм кабыл алынат. Толук эмес индукция усулунда каралуучу бардык учурлар эске алынбайт. Жетишерлик чоң сандагы учурларды гана текшерип көрүү менен, бардык учурлар үчүн бир корутунду - бүтүм чыгарыла берилет. Ошондуктан айрым учурларда чыгарылган корутунду - бүтүм туура болбой да калат. Мындай катачылыкка жол бербөө максатында «Математикалык индукция принциби» деп аталган төмөндөгүдөй усул колдонулуп жүрөт:

1. Эгерде  $A(n)$  сүйлөмүнүн чын экендигин чектүү  $n = p$  сандагы учурлардын бардыгы үчүн далилдөө мүмкүн болсо ( $p$  чектүү натуралдык сан);

2. Эркин тандалган  $n = k$  деп алынган  $k$  натуралдык саны үчүн бул сүйлөмдү чын деп болжолдосок;

3.  $A(n)$  сүйлөмүнүн чын экендигин  $n = k + 1$  болгон учур үчүн далилдей алсак, анда  $A(n)$  сүйлөмүн бардык  $n$  натуралдык сандары үчүн чын деп айтабыз.

**Мисалы:** 1. Берилген  $n$  сандагы так сандардын суммасы  $n^2$  болот деген бүтүмдүн чындыгын текшергиле.

**Текшерүү:**

▷ 1.  $n = 1$  учурунда  $1^2 = 1$  болсо,  $n = 2$  болгондо  $1 + 3 = 4 = 2^2$  болуп,  $n = 3$  болсо  $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$  болуп,  $n = p = 3$  учурларынын бардыгында айтылган бүтүм чын болору текшерилди.

2.  $n = k$  учуру үчүн

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2 \quad (1)$$

чын болсун деп болжолдойбуз.

3.  $n = k + 1$  учуру үчүн

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2 \quad (2)$$

аткарыларын далилдейли. Болжолубуз боюнча  $n = k$  болгондо (1) туура болгондуктан, аны пайдаланып (2) нин сол жагын

$k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$  көрүнүштө жазсак, (2) нин туура экенин көрсөткөн болобуз. Демек, чыгарылган эреже бардык так  $n$  натуралдык сандары үчүн туура, б.а.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 . \triangleleft$$

$$2. 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (3)$$

эрежесинин бардык натуралдык сандар үчүн туура экендигин көрсөткүлө.

▷ **Чыгаруу:**  $n = 1$  болсо, (3) эрежеси  $1 = \left[ \frac{1(1+1)}{2} \right]^2$  же  $1 = 1$  болуп аткарылат.  $n = k$  үчүн (3) туура болсун деп болжолдойлу, б.а.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left[ \frac{k(k+1)}{2} \right]^2 \quad (4)$$

аткарылсын.  $n = k + 1$  үчүн туура экендигин далилдөө үчүн

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 = \left[ \frac{(k + 1) \cdot (k + 2)}{2} \right]^2 \quad (5)$$

аткарылышын көрсөтүү керек. Чынында эле  $n = k$  үчүн (3) эрежеси аткарылат, ошондуктан (4) барабардыгын пайдаланып, (5) тин сол жагын өзгөртүп жазуу менен



$$\left[ \frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left[ \frac{k^2}{4} + k + 1 \right] = (k+1)^2 \cdot \left[ \frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right] = (k+1)^2 \cdot \frac{(k+2)^2}{4} = \left[ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2$$

натыйжасына ээ болуп, (5) тин туура аткарыларын далилдеген болобуз.

◁

**Ньютондун биному:** Практикалык эсептөөлөрдө эки сандын суммасын же айырмасын жетишерлик чоң даражаларга көтөрүү зарылчылыктары туулат. Ошондуктан

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ,  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  формулаларын математикалык индукция усулу менен жалпылап,

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \dots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Ньютондун биному деп аталган формуланы табабыз. Практикалык эсептөөлөрдө Ньютондун биномундагы  $C_n^i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) коэффициенттерин табууну жеңилдетүү үчүн Паскалдын үч бурчтугун түзүп пайдаланабыз:

				1				
				1		1		
			1	2		1		
		1	3	3		1		
	1	4	6	4		1		
	1	5	10	10		5		1
1	6	15	20	15		6		1

Эгерде  $n=5$  болсо, анда эки сандын суммасын 5 – даражага көтөрүү формуласы төмөндөгүчө жазылат:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

$n = 4$  болсо,  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ . Ошентип үч бурчтуктун ар бир жолчосу (чокусун кошпогондо) эки сандын суммасын же айырмасын көтөрүү даражасын, ал эми жолчодогу сандар ажыралуунун коэффициенттерин түшүндүрүшөт. Ньютондун биномун чындыгы да, математикалык индукция усулу менен далилденет.

Ошентип математикалык индукция усулу менен көзүбүзгө көрүнгөн санак сандарында аткарылуучу амал – аракеттер чексиз көп сандарга чейин уланып, кыялыбызда чын бойдон кала берет деген ишеничке ээ болобуз.

## 2. Дискреттик математика түшүнүгү

Көптүктөр теориясында күбө болгондой, айрым көптүктөрдүн элементтери бири – биринен обочо жайгашса, айрымдары жылчыксыз (үзгүлтүксүз) деңгээлдеги жакындыкта жайгашышат. Мисалы: группадагы студенттердин көптүгү, айбанаттардын көптүктөрү, саналуучу буюмдардын көптүктөрү,  $N$  – натуралдык,  $Z$  – бүтүн сандардын көптүктөрүн элементтери бири – бирине жабышпай, обочо турганына күбө болобуз. Мындай көптүктөрдү дискреттик (жылчыктуу же үзүк) көптүктөр деп аташат. Дискреттик көптүктөрдүн элементтери, кайсы бир элементине үймөлөктөп коюулана чексиз жакындап келе алышпайт, же пределдик чекиттерге ээ болушпайт. Ошондуктан үзгүлтүксүз процесстердин математикалык моделдерин түзүүгө, дискреттик көптүктөрдүн элементтерин пайдалана албайбыз. Ошондой болсо да, көзгө көрүнгөн дүйнөнүн көптөгөн кубулуштары өз – өзүнчө санап эсептөөгө боло тургандай абалдарда өзгөрүп, дискреттик маанилер боюнча окуп үйрөнүлөт. Мисалы өндүрүлгөн продукциялар, кокустук чоңдуктардын бөлүштүрүү мыйзамдары, статистикалык тандоолор ж.б.у.с. процесстер дискреттик математиканын изилдөө тармагы болушат.  $Q$  – рационалдык сандардын көптүгү да, натуралдык сандардай эле саналуучу көптүк болгону менен, толук маанидеги дискреттик көптүк деп эсептелбейт. Анткени, анын элементтери бири – бирине чексиз жакындап коюуланып, пределдик абалда дискреттик мүнөзүн жоготушат. Ал эми  $J$  – иррационалдык сандардын,  $R$  – чыныгы сандардын көптүктөрү – сан огунда,  $C$  – комплекстик сандардын талаасы – комплекстик тегиздикте жылчыксыз же үзгүлтүксүз жайгашкан чекиттер сыяктуу мүнөздөлүшүп, дискреттик эмес көптүктөр болушат.

Дискреттик көптүктөрдө жүргүзүлгөн изилдөөлөрдө колдонулган айрым ыкмаларга токтолуп өтөбүз.

## 3. Комбинаториканын элементтери

*Элементтерин санын эсептөөгө мүмкүн болгон көптүктө, кайсы бир шарттарга карата элементтерди тандап жайгаштыруу*

*эрежелери* – комбинаториканын элементтери деген ат менен белгилүү. Комбинаторика сөзү латындардын “combinare” сөзүнөн алынып, кыргызча “айкалыштыра бириктирүү” деген маанини түшүндүрөт. Комбинаторикада изилденүүчү маселе – мисалдар, көптүктөрдө аткарылуучу амалдарга негизделген эрежелер боюнча чечилип, көбүнчө *көптүктөрдү кошуу, көбөйтүү* жана көптүктүн өзүндө жүргүзүлгөн амалдар менен байланышкан болот.

### **Көптүктөрдүн арасындагы комбинаторикалык амалдар**

**Көптүктөрдү кошууда элементтеринин санын (кубаттарын) эсептөө эрежелери:** Айталы өз ара ( $A \cap B = \emptyset$ ) кесилишпеген  $A$  көптүгүндө  $n$  сандагы элемент, ал эми  $B$  көптүгүндө  $k$  сандагы элемент болсун, б.а. кубаттары  $\mu(A) = n \wedge \mu(B) = k$  дейли. Бул учурда  $A$  менен  $B$  көптүктөрүнүн  $A \cup B$  биригүүсүндө  $n + k$  сандагы элемент болору талашсыз. Демек

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = n + k, \quad (6)$$

Көптүктөрдү бириктиргенде, алардын элементтерин сандарынын суммасынча элементи же кубаты бар көптүк келип чыгат. Анда  $\forall a \in A$  – “ $A$  көптүгүн каалагандай  $a$  элементи”  $n$  ыкма менен тандоо мүмкүнчүлүгү болсо,  $\forall b \in B$  – “ $B$  көптүгүн каалагандай  $b$  элементи”  $k$  ыкма менен тандоо мүмкүнчүлүгү болсо, анда  $A \cup B$  көптүгүнүн каалагандай  $c$  - элементи тандоо үчүн  $n + k$  сандагы мүмкүнчүлүк болот.

Эгерде  $A$  менен  $B$  көптүктөрү өз ара кесилишип,  $\mu(A \cap B) = m$  сандагы жалпы элементтерге ээ болушса, анда  $c$  элементи

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) = n + k - m \quad (7)$$

тандоо мүмкүнчүлүгүн саны  $n + k - m$  болот.

**Мисалдар: 1.** 2 - курста 40 студент бар, алардын ичинен 21 студент стипендия алышса, 32 студент кошумча ишке орношуп алышкан. Эгерде 15 студент стипендия алышып, кошумча да иштегени белгилүү болсо, анда канча студент стипендия да албайт, жумушка да орношкон эмес.

**Чыгаруу:** ► Жалпы курстагы студенттердин көптүгүн универсалдык  $U$  көптүгү десек, анда ага камтылган  $A$  – стипендия алгандардын,  $B$  – жумушка орношкондордун,  $A \cap B$  – экөөсүнө тең катышкандардын көптүктөрү болушат. Бул көптүктөрдүн кубаты же

элементтерин саны  $\mu(U) = 40$ ,  $\mu(A) = 21$ ,  $\mu(B) = 32$ ,  $\mu(A \cap B) = 15$  болушат. (2) формула боюнча  $A \cup B$  көптүгүндө

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) = 21 + 32 - 15 = 38$  сандагы элементтер болот. Анда стипендия да албаган, жумушу да жок студенттердин саны  $\mu(U) - \mu(A \cup B) = 40 - 38 = 2$  ге барабар. ◀

Эгерде  $A$ ,  $B$ ,  $C$  деген үч көптүктөр берилишсе, анда алардын биригүүлөрүн элементтерин санын

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \\ + \mu(A \cap B \cap C) \end{aligned} \quad (8)$$

формула менен эсептейбиз.

**2 – мисал:** Спорттук лагерде машыгууга 70 студент чакырылган. Алардын ичинен 36 студент бокс менен, 28 студент улуттук күрөш менен, 20 студент самбо менен машыгышат. Ал эми 10 студент бир учурда бокс жана самбо менен, 12 студент улуттук күрөш жана самбо менен, 14 студент бокс жана улуттук күрөш менен машыгышкан. 17 студент болсо, спорттун эч кандай түрү менен машыгышпай, лагердин чарбалык иштерине жардам беришкени белгилүү болсо, канча студент спорттун бир гана түрү менен машыгарын аныктагыла.

**Чыгаруу:** ▶  $B$  – “бокс менен”,  $K$  – “күрөш менен”,  $C$  – “самбо менен” машыгышкан, жана  $\checkmark$  – “чарбалык иштер менен” алектенген студенттердин көптүгү болсун.

**1 – кадам:** Маселе шартынан  $\mu(B) = 36$ ,  $\mu(K) = 28$ ,  $\mu(C) = 20$ ,  $\mu(B \cap C) = 10$ ,  $\mu(K \cap C) = 12$ ,  $\mu(B \cap K) = 14$  жана  $\mu(\checkmark) = 17$  келип чыгат. Жалпы студенттердин санын универсалдык  $U$  көптүгү десек, анда спорт менен машыккан студенттердин саны

$\mu(B \cup K \cup C) = \mu(U) - \mu(\checkmark) = 70 - 17 = 53$  болот. Демек (8) формуласын пайдаланып  $B$ ,  $C$ ,  $K$  көптүктөрүн биригүүлөрүндөгү элементтердин санын

$\mu(B \cup K \cup C) = \mu(B) + \mu(K) + \mu(C) - \mu(B \cap C) - \mu(K \cap C) - \mu(B \cap K) + \mu(B \cap K \cap C)$  эсептөө эрежеси боюнча аныктайбыз. Мындан спорттун үч түрү менен тең машыккандардын саны болгон  $\mu(B \cap K \cap C)$  табылат.

$$\mu(B \cap K \cap C) = \mu(B \cup K \cup C) - \mu(B) - \mu(K) - \mu(C) + \mu(B \cap C) +$$

$+\mu(K \cap C) + \mu(B \cap K) = 53 - 36 - 28 - 20 + 10 + 12 + 14 = 5$ . Демек 5 студент спорттун үч түрү менен машыгат.

**2 – кадам:** Спорттун эки түрү менен таанышкандардын санынан, үч түрү менен машыккандарды кемитип чыгабыз, анткени алар эки жолудан эсепке кирип калышат. Демек спорттун эки түрү менен машыккандардын **туура саны:**

$\mu(B \cap C)$  – бокс менен самбого:  $10 - 5 = 5$  студент;

$\mu(K \cap C)$  – күрөш менен самбого:  $12 - 5 = 7$  студент;

$\mu(B \cap K)$  – бокс менен күрөш:  $14 - 5 = 9$  студент болуп, бардыгы  $5 + 7 + 9 = 21$  студент спорттун эки түрү менен машыгышат.

**3 – кадам:** Спорттун аралаш түрлөрүнө катышпаган ар бир спортчулардын **туура санын** аныктайбыз.

Бокска:  $\underbrace{36}_{\text{Бокс}} - \left( \underbrace{5}_{B \cap K \cap C} + \underbrace{5}_{B \cap C} + \underbrace{9}_{B \cap K} \right) = 36 - 19 = 17$  студент;

Күрөшкө:  $\underbrace{28}_{\text{күрөш}} - \left( \underbrace{5}_{B \cap K \cap C} + \underbrace{7}_{K \cap C} + \underbrace{9}_{B \cap K} \right) = 28 - 21 = 7$  студент;

Самбого:  $\underbrace{20}_{\text{күрөш}} - \left( \underbrace{5}_{B \cap K \cap C} + \underbrace{5}_{B \cap C} + \underbrace{7}_{K \cap C} \right) = 20 - 17 = 3$  студент

катышып, бардыгы  $17 + 7 + 3 = 27$  студент спорттун аралаш түрлөрү менен машыгышпай, бир гана түрү менен машыгышат.

**4 – кадам:** Ал эми экинчи жактан жалпы 70 студенттердин 17 си чарба жумуштарда иштесе, анда спорттун бир түрү менен гана машыгышкан студенттердин санын  $x$  десек:

$x = 70 - (17 + \underbrace{5}_{\text{үч түрү}} + \underbrace{21}_{\text{эки түрү}}) = 27$  студент спорттун бир түрү

менен гана машыккан деп, жоопту толуктайбыз. ◀

**Көптүктөрдү көбөйтүүдө элементтеринин санын (кубаттарын) эсептөө эрежелери:** Айталы  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  көптүгүндө  $n$  – сандагы, ал эми  $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_k\}$  көптүгүндө  $k$  – сандагы элементтер болушсун, б.а.  $\mu(A) = n$ ,  $\mu(B) = k$  кубаттарына ээ болушсун. Анда бул эки көптүктүн көбөйтүндүсү  $A \times B$  символу менен белгиленип, элементтери  $(a_i, b_j)$  көрүнүштөгү түгөй сандар менен

белгиленген көптүк болот. ( $i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, 3, \dots, k$ ). Түшүнүктүү болушу үчүн  $A$  көптүгүн элементтерин  $Ox$  – абцисса огуна жайгаштырсак, ал эми  $B$  көптүгүн элементтерин  $Oy$  – ордината огуна жайгаштырсак, анда  $A \times B$  - көбөйтүндү көптүктүн элементтери: Декарттык координаталар тегиздигинде жайгашкан координаталары  $(a_i, b_j)$  болушкан чекиттерди элестетишет.

$A \times B$  көптүгүн элементтеринин саны  $n \cdot k$  болот, же көбөйтүндү көптүк  $\mu(A \times B) = n \cdot k$  кубатына ээ.

$$\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B) = n \cdot k \quad (9)$$

Эгерде экиден ашыкча көптүктөр көбөйтүлсө, анда көбөйтүндү көптүк, алардын санынча топтордон турган элементтер болушат. Мисалы үч көптүктөр көбөйтүлсө, көбөйтүндүсү үчтүктөрдөн турушат. (4) формуласы көбөйтүндү көптүктүн элементтерин санын аныктоо эрежеси деп аталып, көбөйтүндү көптүктүн кубаты, көбөйүүчү көптүктөрдүн кубаттарынын көбөйтүндүсүнө барабар болорун көрсөтөт.

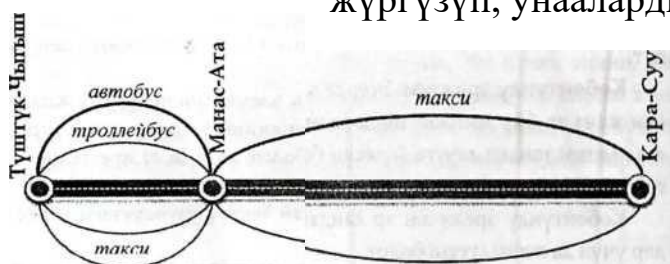
**3 – мисал:** Ош шаарынын Түштүк – Чыгыш аймагынан Манас – Ата аймагына автобус, троллейбус, маршрутка жана такси менен келүүгө мүмкүн болсо, Манас – Ата аймагынан Кара Суу базарына маршрутка же такси менен гана барууга болору белгилүү. Түштүк – Чыгыш аймагынан Кара Суу базарына канча түрдүү тандоолор менен барууга болорун эсептегиле.

Чыгаруу: ► Көптүктөрдүн тилинде

$$A = \left\{ \underbrace{\text{автобус}}_a, \underbrace{\text{троллейбус}}_{\text{тр}}, \underbrace{\text{маршрутка}}_m, \underbrace{\text{такси}}_t \right\}, \quad B = \left\{ \underbrace{\text{маршр}}_m, \underbrace{\text{такси}}_t \right\}$$

көптүктөрү болушсун. Элементтеринин саны же кубаты  $\mu(A) = 4$ ,  $\mu(B) = 2$  болуп, (4) формула боюнча

$\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B) = 4 \cdot 2 = 8$  түрдүү тандоолор менен барууга болорун табабыз. Чынында эле сызылган 1 – схема боюнча талдоо жүргүзүп, унааларды 8 ыкмада тандоого болоруна



1 - схема

ишенебиз. Түштүк – Чыгыш менен Манас – Ата

аймактарын 4 жолдор туташтырса, манас – Ата

менен Кара Суу базарын эки жолдо туташтырып турушат. Алардын каалаган бири менен жүрүүлөрдүн санын эсептесек, 8 сандагы түгөйлөрдү алабыз:  $\{a, m\}, \{a, t\}, \{tr, m\}, \{tr, t\}, \{t, m\}, \{t, t\}, \{m, t\}, \{m, m\}$ .

Тандоо ыкмаларын түгөйлөр аркылуу таблицада көрсөтүүгө болот:

<b>В</b> <b>А</b>	такси	маршрутка
автобус	(Автобус, такси)	(Автобус, маршрутка)
троллейбус	(Троллейбус, такси)	(Троллейбус, маршрутка)
маршрутка	(Маршрутка, такси)	(Маршрутка, маршрутка)
такси	(Такси, такси)	(Такси, маршрутка)

◀

4 – мисал: Жайкы лагердин катышуучуларына түштөнүү үчүн, 5 түрдүү биринчи тамак, 4 түрдүү экинчи тамак сунушталат. Эс алуучу канча түрдүү ыкма менен биринчи жана экинчи тамактардан бирден тандап жей алат ?

Чыгаруу: ► Биринчи тамактар – А, экинчи тамактар – В көптүгү:

$$A = \left\{ \underbrace{\text{шорпо}}_{a_1}, \underbrace{\text{лагман}}_{a_2}, \underbrace{\text{рассольник}}_{a_3}, \underbrace{\text{борщ}}_{a_4}, \underbrace{\text{щи}}_{a_5} \right\},$$

$$B = \left\{ \underbrace{\text{куурдак}}_{b_1}, \underbrace{\text{палоо}}_{b_2}, \underbrace{\text{котлет}}_{b_3}, \underbrace{\text{бифштекс}}_{b_4} \right\} \quad \text{көрүнүштө}$$

белгиленип жазылсын.

Анда алардын кубаттары  $\mu(A) = 5$ ,  $\mu(B) = 4$  элементтерден туруп,  $A \times B$  көбөйтүндүсү  $\mu(A \times B) = 5 \cdot 4 = 20$  сандагы түгөй элементтерге ээ болот. Демек бул тамактардын ар биринен бирден тандоолордун саны 20 түгөй тамактар болушат. Бул ырастоонун тууралыгын “графтар” же “варианттар дарагы” – деп аталган схемада текшерип көрөбүз (2 – схема). Тамырдан төмөн карай өсүп чыккан дарактын алгачкы 5 бутагында биринчи тамактар, ал эми алардын ар биринен өсүп чыккан 4 дарактын ар биринде 1 – тамакка кошо 2 – тамак катары тандалган түгөй тамактар коюлган.  $a_1$  менен кошо жегенге  $(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4)$  төрт вариант бар ж.б.у.с.  $a_5$  менен кошо жегенге да  $(a_5, b_1), (a_5, b_2), (a_5, b_3),$

$(a_5, b_4)$  төрт варианттар болуп, бардык варианттардын саны 20 чыгарын көрөбүз.



2 – схема

Ушул натыйжаны төмөндөгү таблицадан көрүүгө болот. ◀

<b>A \ B</b>	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$a_1$	$(a_1, b_1)$	$(a_1, b_2)$	$(a_1, b_3)$	$(a_1, b_4)$
$a_2$	$(a_2, b_1)$	$(a_2, b_2)$	$(a_2, b_3)$	$(a_2, b_4)$
$a_3$	$(a_3, b_1)$	$(a_3, b_2)$	$(a_3, b_3)$	$(a_3, b_4)$
$a_4$	$(a_4, b_1)$	$(a_4, b_2)$	$(a_4, b_3)$	$(a_4, b_4)$
$a_5$	$(a_5, b_1)$	$(a_5, b_2)$	$(a_5, b_3)$	$(a_5, b_4)$

5 – мисал: 3, 4, жана 5 цифраларын колдонуп, кайталанбай турган тартипте канча эки орундуу сандарды жазууга болот.

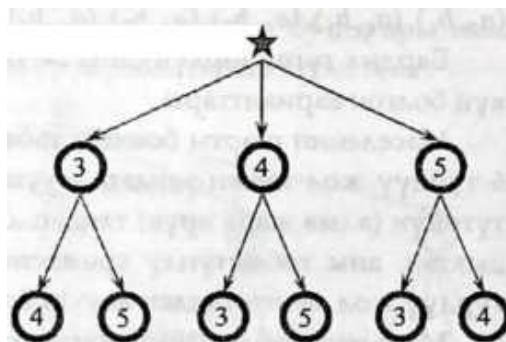
Чыгаруу: ▶ Эки орундуу сан бирдиктер жана ондуктар аркылуу жазылышат. А – бирдиктердин, В – ондуктардын көптүктөрү болушсун. Анда ондуктардын ордуна 3, 4, 5 цифраларын гана колдоно алабыз, ал эми бир цифраны эки жолу колдонууга укук берилбегендиктен, В көптүгүнүн элементтеринин саны экиден ашпайт  $\mu(A) = 3$ ,  $\mu(B) = 2$ . Анда (4) формула боюнча  $\mu(A \times B) = 3 \cdot 2 = 6$  жолу цифралары кайталанбай турган эки орундуу сандарды түзө алабыз. Графтар ыкмасы менен текшерели: 3 – схемадан биринчи бутактардын чокулары менен экинчи бутактын чокуларында турган цифраларды түгөйлөштүрүп жазып, эки орундуу алты: 34, 35, 43, 45, 53, 54 сандарын алабыз. ◀



ондуктар

3 - схема

жүздүктөр



## Көптүктүн өзүндө жүргүзүлгөн комбинаторикалык амалдар

Чектүү көптүктөрдүн элементтери менен комбинаторикалык амалдар негизинен төмөндөгүдөй багыттарга бөлүнүшөт:

**I. Чектүү көптүктөрдү иреттөө амалы деп, чектүү  $n$  – сандагы элементи бар көптүктүн элементтерин орундарын алмаштыруу мүмкүнчүлүктөрүн жана санын (канча жолу) аныктоону айтабыз.**

**II. Чектүү  $n$  сандагы элементи бар көптүктүн элементтеринен,  $k$  сандагы элементтерден турган иреттелген көптүктөрдү тандап түзүүнүн санын аныктоо эрежеси,  $n$  сандагы элементтерди  $k$  сандан орундаштыруу амалы деп аталат.**

**III. Чектүү  $n$  – сандагы элементи бар көптүктүн өзүнө камтылып турушкан,  $k$  – сандагы элементтерден турган көптүктөрдүн санын аныктоо,  $n$  элементүү көптүктүн элементтерин  $k$  элементтен топтоштуруу амалы деп аталат.**

**I. Орун алмаштыруу – деп,  $n$  элементүү көптүктү элементтерин кайталанбай тургандай тартипте бири – биринен жайгашуу ирети менен гана айырмалана тургандай жайгаштыруу мүмкүнчүлүктөрүн санын түшүнөбүз.**

Мындай иреттеп жайгаштыруудан соң, түзүлгөн көптүктөрдүн баары  $n$  элементтүү болушат, б.а. орун алмаштырууда көптүктүн кубаты сакталат.

**Мисалы: 1)** Элементтерин саны экөө болгон  $\{n_1, n_2\}$  көптүгүн элементтерин эки түрдүү ыкмада  $\{n_1, n_2\}$ ,  $\{n_2, n_1\}$  орун алмаштырып жаза алабыз. Элементтеринин саны үчөө  $\{n_1, n_2, n_3\}$  болгон көптүктүн элементтерин

$$n_1, n_2, n_3; \quad n_2, n_1, n_3; \quad n_2, n_3, n_1;$$

$$n_3, n_2, n_1; \quad n_3, n_1, n_2; \quad n_1, n_3, n_2.$$

6 жолу орундарын алмаштырып, ар башка үч орундуу көптүктөр катары алабыз.

Мисалдардан сезилгендей көптүктүн элементтерин саны көбөйгөн сайын, орун алмаштыруулардын санын эсептөө татаалдашып барат. Ошондуктан эсептөө тажрыйбаларына жана математикалык индукция усулуна таянып, элементтеринин саны  $n$  болгон көптүктүн элементтерин

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad (10)$$

жолу орундарын алмаштырууга болот деген тыянак чыгарылат. Мында  $n!$  – «эн факториал» деп окулуп, 1 ден  $n$  ге чейинки натуралдык сандардын көбөйтүндүсүнө барабар болот: Жогорудагы мисалда үч элементтүү көптүктүн элементтери  $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$  жолу орундарын алмаштырып жазылган эле.  $P_n$  белгилөөсү француз тилиндеги орун алмаштыруу – permutation сөзүнүн баш тамгасынан алынып, далилдөөсү математикалык индукция усулу аркылуу жүргүзүлөт ( $0! = 1$  деп алынат).

2) Ишке жаңы кирген адиске ар бир күнү сөзсүз аткарылууга тийиш болгон 5 милдет жүктөлдү. Жаш адис бул милдеттерди канча жолу кезектерин алмаштырып аткара алат ?

Жооп: (10) формуласын пайдаланып, адис бул милдеттерди

$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$  жолу кезектерин алмаштырып аткаруу мүмкүнчүлүгү бар деп жооп берүүгө болот.

**II. Орундаштыруу:** Орундаштыруулар кайталануучу жана кайталанбоочу болуп экиге бөлүнүшөт:

а) Адегенде кайталануучу орундаштырууларга мисал келтирели:

6 – мисал: 1, 2, 3 жана 4 цифралары менен канча эки орундуу сандарды түзүүгө болот.

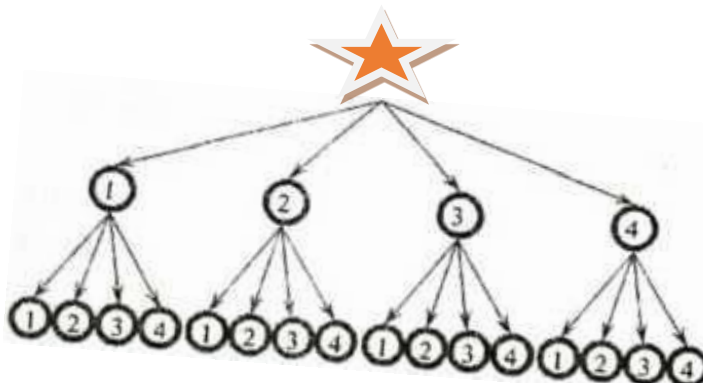
Чыгаруу: ► Берилген цифралар  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  төрт элементтүү көптүк десек, анда эки орундуу сандар түгөй цифралардан тургандыктан, түзүлүүчү эки орундуу сандар  $A \times A$  - көбөйтүндү көптүктүн элементтери болорун байкайбыз. Көбөйтүндү көптүктүн элементтерин санын көрсөткөн кубаты  $\mu(A \times A) = \mu(A) \cdot \mu(A) = 4 \cdot 4 = 4^2 = 16$  болгондуктан, эки орундуу 16 сандарды түзө алабыз. Бирок жогорудагы 5 – мисалдан айырмаланып, цифралар кайталанып колдонулганына

ишенүү максатында графтар ыкмасына кайрылабыз (4 - схема). Тамырдан чыгышкан 4 бутактардын чокуларындагы цифраларды, кийинки 16 бутактардын чокуларындагы цифралар менен

ондуктар

4 -схема

жүздүктөр



түгөйлөштүрүп жазып: 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44 эки орундуу сандарын алабыз.

Мындан бир цифра эки жолу кайталанып колдонулган 11, 22, 33, 44 сандарын көрөбүз. Ушундай эле натыйжаны таблицада көрүүгө

Бирдик \ Ондук	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
3	31	32	33	34
4	41	42	43	44

болот. Демек цифралар кайталанбай турган эки орундуу сандардын саны  $16 - 4 = 12$  ◀

Ошентип  $n$  сандагы элементи бар  $A$  көптүгүн элементтеринен,  $k$  элементтерден турган көптүкчөлөрдү канча ыкма менен тандап алууга болорун, көбөйтүндү көптүктүн элементтерин санын аныктоочу (9) формула менен  $\mu(A \times A) = n^k$  көрүнүштө эсептөөгө болорун көрдүк.

Бул амалды “ $n$  элементтүү көптүктүн элементтерин  $k$  элементтен орундаштыруу” – деп атап, алардын санын эсептөө формуласын (9) дан айырмалап, жалпы учурда  $A_n^k$  – символу менен белгилейбиз. Кайталануучу орундаштыруулардын санын  $\bar{A}_n^k$  деп белгилеп,

$$\bar{A}_n^k = n^k \quad (11)$$

формуласы менен эсептейбиз. Орундаштыруу белгисинде француздардын “орундаштыруу же иреттөө” деген маанидеги  $A$  – “Arrangement” сөзүнүн баш тамгасы колдонулат.

б)  $n$  элементүү көптүктүн элементтерин, кайталанбай тургандай тартипте  $k$  элементтен тартипте орундаштыруулардын санын аныктоо үчүн, жалпы  $P_n = n!$  – орун алмаштыруулардын санынан, кайталануу коркунучу болгон  $(n - k)$  сандагы элементтердеги орун алмаштырууларын  $(n - k)!$  санына кыскартып салып, азайтуу керек:

$$A_n^k = \frac{P_n}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k) \cdot [n-(k-1)] \cdot [n-(k-2)] \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-k)} =$$

$= [n - (k - 1)] \cdot [n - (k - 2)] \cdot \dots \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n$ . Бул маанини квадраттык кашааны ачып, кемүү тартибинде жазып

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+2)(n-k+1) \quad (12)$$

кайталанбоочу орундаштыруулардын санын эсептөө формуласына ээ болобуз. (12) формула аркылуу жогоруда 6 – мисалда кайталанбоочу орундаштыруулардын саны  $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 = 12$  экени чын болгонун, дагы бир жолу текшерип көрөбүз.

Үч элементтүү  $\{n_1, n_2, n_3\}$  көптүгүн элементтерин экиден жазып чыгуу мүмкүнчүлүктөрүн саны 6 жолу болуп, төмөндөгүдөй жазылат:

$$\{n_1, n_2\}, \{n_2, n_1\}, \{n_1, n_3\}, \{n_3, n_1\}, \{n_2, n_3\}, \{n_3, n_2\}. \quad (*)$$

Ал эми көптүктүн элементтери көп болсо, аларды белгилүү бир сандагы топторго бөлүп орундаштыруулардын санын жазып көрсөтүү, эсептөө кыйынга турат. Ошондуктан  $n$  элементтүү көптүктүн элементтерин  $k$  элементтен жазып чыгуунун санын (12) формуласы менен эсептейбиз. Бул формуланын чындыгын математикалык индукция методу менен далилденет.

**III. Топтоштуруу:** Үч элементтүү  $\{n_1, n_2, n_3\}$  көптүгүн эки элементтен топтоштурууда бир жолу жазылган экилик топ, экинчи жолу кайталанып жазылбайт. Экиден орундаштырууда бир эле экилик топ, элементтеринин орундарын алмаштырып кайталана бергенин жогоруда (\*) дан көрдүк. Демек, үч элементтүү көптүктү экиден топтоштуруу

$\{n_1, n_2\}, \{n_1, n_3\}, \{n_2, n_3\}$ , үч жолу гана болуп, кайталоолордун санына 2 эсе кыскарат.

Жалпы учурда  $n$  элементтүү көптүктүн элементтерин  $k$  элементтен ( $k \leq n$ ) топтоштуруулардын саны

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\dots 1}{(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k)(n-k) \cdot (n-(k+1))\dots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ же}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (13)$$

жолу болот. Анткени топтоштуруулардын саны орундаштыруудан  $k!$  эсе аз, б.а.  $k$  сандагы элементтер орундары алмашкан шарттарда  $k!$  жолу кайталанбайт.

Ошондуктан үч элементтүү көптүктүн элементтерин эки элементтен топтоштуруулардын саны, орундаштыруулардын саны 6 га караганда  $k! = 2! = 1 \cdot 2 = 2$  эсе аз же

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1!} = 3 \text{ болот.}$$

Комбинаториканын элементтери болушкан  $P_n, A_n^k, C_n^k$  сандары, тиешелүү түрдө  $n$  элементтүү көптүктүн элементтерин орун алмаштыруу, орундаштыруу, топтоштуруу мүмкүнчүлүктөрүн санын көрсөтүп, алардын бардык  $n, k$  натуралдык сандар үчүн тууралыгы математикалык индукция усулу менен далилденет. Аларды эсептөөдө  $0! = 1, C_n^0 = 1, C_n^n = 1, C_n^{n-k} = C_n^k, C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$  эрежелери аткарыларын текшерип ишенүүгө болот.

## Көнүгүү

1. Математикалык индукция усулу менен бардык  $n \in N$  сандары үчүн төмөндөгү бүтүмдөрдүн тууралыгын далилдегиле:

а)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$

б)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$

в)  $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1;$

$$\text{г) } \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}.$$

2. Ньютондун биному боюнча эсептегиле.

а)  $(x + 7)^8$ ; б)  $(a + b)^5$ ; в)  $(1 - q)^n$ .

3.  $A \cap B$  көптүгүн тапкыла жана аны координаттык окто көрсөткүлө:

а)  $A = \{x \mid x \in R, 2x - 3 \geq 5\}$ ,  $B = \{x \mid x \in R, 3 - 2x \geq -5x + 15\}$ ;

б)  $A = \{x \mid x \in R, 4x + 5 < 29\}$ ,  $B = \{x \mid x \in R, 2x - 1 > -4x - 17\}$ .

3. Координата огунда төмөндөгү көптүктөрдүн биригүүлөрүн сүрөттөгүлө:

а)  $A = \{x \mid x \in Z, x > -4\}$ ,  $B = \{x \mid x \in Z, x \leq -3\}$ ;

б)  $A = \{x \mid x \in N, x > 2\}$ ,  $B = \{x \mid x \in Z, x \leq 7\}$ ;

в)  $A = \{x \mid x \in R, x \geq -3\}$ ,  $B = \{x \mid x \in R, x \leq 8\}$ ;

г)  $A = \{x \mid x \in Z, -1 \leq x < 5\}$ ,  $B = \{x \mid x \in Z, 1 < x \leq 6\}$

4. Эгерде:

а)  $A = \{a, b, c, d, e\}$  жана  $B = \{x, y, z\}$ ;

б)  $A = B = \{a, b, c, d\}$ ;

5. в)  $A = \{1, 2, 3\}$  жана  $B = \{0\}$  болсо, анда  $A \times B$  декарттык көбөйтүндүсүн тапкыла.

6. 1, 2, 3, 4, 5 цифраларынан турган бардык эки орундуу сандарды жазгыла. Алардын ичинен 4 цифрасы менен башталган сандарды жазгыла.

7.  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  жана  $B = \{2, 3\}$  көптүктөрү берилсе,  $A \times B$  менен  $B \times A$  декарттык көбөйтүндүлөрүн тапкыла.

8. Конкурстун жыйынтыгында жеңүүчү болуп табылган 3 студенттин бирөөсүн чет өлкөгө жөнөтүү чечими кабыл алынган. Жөнөтүлүүчү студентти канча түрдүү ыкма менен тандоого болот.

9. Жабылган кутуга 6 кызыл жана 4 кара смартфондор салынган. Алардын кызылын же карасын канча түрдүү ыкма менен тандап алууга болот.

10. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 цифраларын жардамы менен канча үч орундуу сандарды түзүүгө болот?

11. 5 олтургучка 2 конокту канча түрдүү ыкмалар менен олтургузууга болот?

12. 10 цифраларды пайдаланып, 4 орундуу цифралардан турган сандарды пайдаланып:

а) цифралар кайталанган учур үчүн, б) цифралар кайталанып жазылбаган учур үчүн канча автомобиль номерлерин даярдоого болот?

12. Группада 25 студент бар, алардын ичинен 1 старостаны 2 жардамчысын канча түрдүү ыкмалар менен тандап алууга болот?

13. Группага семестр ичинде 8 предмет окутулат. Бул предметтерди жуманын 5 күнүнө канча түрдүү ыкмалар менен бөлүштүрүп, расписание түзүүгө болот?

14. Группада 17 эркек жана 8 кыз окушат. Алардын ичинен кайталанбай турган тартипте 5 эркек жана 5 кызды канча түрдүү ыкма менен тандап, экскурсияга жөнөтүүгө болот?

### 1.1.3 Рационалдык сандардын мейкиндиги

Бүтүн сандардын көптүгүндө чексиз көп элементтер болгонуна карабастан, сан огунда бири – биринен «бир» аралыгында обочолонгон чекиттер аркылуу сүрөттөлүп, чөйрөдөгү «бир» аралыгынан жакын жайгашкан нерселерди сүрөттөөгө жетишсиз болот. Ошондой эле бүтүн сандар «бир» салмагынан, убактысынан ж.б. аз же кичине болгон абалдарды баалоого мүмкүнчүлүгү жетпейт. Бул кемчилдикти жоюу үчүн жаңы «бөлчөк» же «рационалдык» сан – моделдери түзүлүп, алар мурдагы эле ондук системадагы бүтүн сандардын жардамы менен жазылат. Ал үчүн кыскарбас же жалпы көбөйтүүчүлөрү жок  $p, q$  бүтүн сандарын ( $q \neq 0$ ) алып, аларды  $\frac{p}{q}$  көрүнүштө жазып «бөлчөк сан» же «рационалдык сан» деп айтабыз.  $p$  саны бөлчөктүн алымы,  $q$  саны бөлчөктүн бөлүмү деп айтылат. Эгерде бөлчөктүн алымы, бөлүмү кыскаруучу бүтүн сандар болушса, анда  $P, Q$  деп аларды кыскартып бүткөндөн кийинки бүтүн сандарды түшүнөбүз.

**1.1.3 Аныктама.** Бардык бүтүн жана бөлчөк сандардын көптүгү рационалдык сандардын көптүгү деп аталып,  $Q$  тамгасы менен белгиленет жана  $Q = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$  символу менен жазып түшүндүрүлөт.

Рационалдык сандардын көптүгү  $N, Z$  көптүктөрүн муктаждыкка жараша кеңейтилүүсү болуп, аларды өзүнө камтып турат же  $N \subset Z \subset Q$ . Чынында эле каалагандай  $a$  бүтүн санын,  $\frac{a}{1}$  көрүнүштөгү бөлчөк катары түшүнүүгө болот. Рационалдык  $Q$  сандардын көптүгү,  $N$  натуралдык менен  $Z$  бүтүн сандарга караганда көптөй сезилгени менен, б.а.  $Q$  көптүгү  $N, Z$  көптүктөрүн камтып турганына карабай, үчөөсү тең элементтери барабар, тең кубаттуу же эквиваленттүү көптүктөр болушат  $\mu(N) = \mu(Z) = \mu(Q)$ , же  $N \sim Z \sim Q$ .

▷ Чынында эле, бардык оң  $Q_+ = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in Z, q > 0, p \geq 0 \right\}$  сандары  $p, q$  оң

бүтүн сандары менен түзүлгөндүктөн, оболу  $p$  ны бардык натуралдык сандарды кабыл алсын деп  $q$  ну өзгөртүүсүз калтыруу менен,

$Q_q = \left\{ \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \dots, \frac{n}{q}, \dots \right\}$  эсептөөгө мүмкүн болгондой санактык көптүктү

түзөбүз. Кийинки кадамда  $\frac{1}{q}$  санынын бөлүмүндөгү  $q$  га бардык

натуралдык сандарды коюп,  $Q_1 = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, \dots \right\}$  санактык көптүгүн

түзөбүз. Андан кийинки кадамда  $\frac{2}{q}$  санын бөлүмүндөгү  $q$  га бардык

натуралдык сандарды коюп,

$Q_2 = \left\{ \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{k}, \dots \right\}$  санактык көптүгүн алабыз.

Ушул процессти улантуу менен

$Q_n = \left\{ \frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \dots, \frac{n}{k}, \dots \right\}$  санактык көптүгүнө ээ болобуз, мында  $n, k \in N$ . Бул

процессти чексиз улантуу менен кыскаруучу бөлчөктөрүн кыскартып бүтүп, оң рационалдык сандардын көптүгүн  $Q_+ = Q_q \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n \cup \dots$

саналуучу сандагы, саналуучу көптүктөрдүн биригүүсү катарында жазууга жетишебиз. Ошентип кыялыбыздагы чексиз эсептөө

процессинде алардын ар бирин эсептеп бүтүп, улам экинчисине өтүп олтуруп,  $Q_+$  көптүгүн элементтерин санап чыгууга болот деген

теориялык бүтүм чыгарабыз же  $\mu(Q_+) = a$ . Бардык терс рационалдык сандардын саны, бардык оң рационалдык сандардын санына тең

болгондуктан, алардын кубаттары тең  $\mu(Q_-) = \mu(Q_+) = a$  болот. Ал эми  $Q = Q_+ \cup Q_-$  болгондуктан  $Q_+$  жана  $Q_-$  саналуучу болуп,  $Q$  да саналат

деп эсептейбиз же  $\mu(Q) = a$ . ◁

$N, Z$  сандары сан огунда бири – биринен обочолонгон чекиттер аркылуу сүрөттөлсө,  $Q$  сандары өтө тыгыз абалда жайгашкан чекиттер аркылуу сүрөттөлүп, алардын тыгыздык деңгээлдерин көз мерчеми менен аныктоо мүмкүн болбой, пределдик абалдар аркылуу гана түшүндүрө алабыз. Ошондуктан эки коңшулаш рационалдык санды

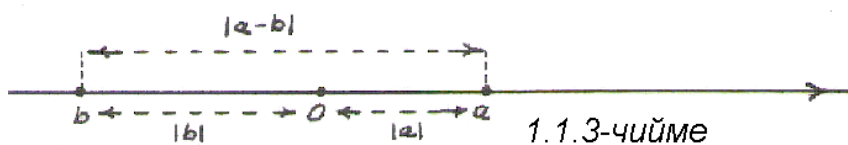


көрсөтүүгө мүмкүн эмес. Чынында эле  $r_1, r_2$  сандарын коңшулаш деп ойлосо, алардын арасында  $r_3 = \frac{r_1 + r_2}{2}$  саныны жайгашканын жана бул сыяктуу чексиз көп  $Q$  сандары  $r_1$  менен  $r_2$  нин арасында бар экенин көрсөтө алабыз. Демек, сан огунда рационалдык сандар бүтүн сандар сыяктуу бири – биринен обочо абалдарда жайгашпастан, тыгыз коңшуларын табууга мүмкүн эмес абалга чейинки деңгээлде жакын жайгашкан туташ сызыкты элестетүүчү чекиттер сыяктуу көрүнөт. Ошентип, чөйрөдөгү түз сызык бойлой жайгашкан бөлүкчөлөрдү чекиттер деп ойлоп, алардын абалдарына сандардын жардамы менен байкоо жүргүзүү мүмкүнчүлүгү түзүлөт. Бүтүн сандарды колдонуп айрым турактуу кубулуштарды үйрөнө алганыбыз менен, «бир» аралыгынан жакын жайгашкан турактуу жана кыймылдуу кубулуштарды үйрөнүү мүмкүн эмес. Рационалдык сандарды ойлоп табуудан кийин, бир чекиттен (сандан) экинчи чекитке (санга) жакындап келүү аппараты - предел ойлонуп табылып, кыймылдуу процесстерди үйрөнүүгө жол ачылган. Предел аппараты аралыктын нөлгө чейин чексиз кичирейүүсү же чексизге чейин чоңоюусу сыяктуу абалдарды түшүндүрүүгө мүмкүнчүлүк жаратып, кыймылдуучу чекиттердин аралыгын ченөөгө шарт түзөт.

**1.1.4 Аныктама.** Сан огунда  $O$  башталмасынан  $a$  рационалдык санына чейинки аралык  $a$  санын модулу же абсолюттук чоңдугу деп аталып,  $|a|$  символу менен белгиленет.

$O$  башталмасынан  $a$  жана  $-a$  сандары бирдей узактыкта жайгашкандыктан

$|a| = |-a|$  жана аралык оң сан менен



ченелгендиктен  $|a| \geq 0$  болот. Демек, абсолюттук чоңдукту:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{эгерде } a \geq 0 \text{ болсо,} \\ 0, & \text{эгерде } a = 0 \text{ болсо,} \\ -a, & \text{эгерде } a < 0 \text{ болсо} \end{cases}$$

деп түшүнүүгө болот.

**1.1.5 Аныктама.** Эки  $a$  жана  $b$  рационалдык сандарынын арасындагы метрика же аралык чени деп, алардын айырмасын абсолюттук чоңдугун же сан огунун  $a$  дан  $b$  га (же  $b$  дан  $a$  га) чейинки кесиндисин узундугун

айтып, метриканы  $\rho(a,b)=|a-b|$  же  $\rho(b,a)=|b-a|$  көрүнүштө белгилейбиз (1.1.3-чийме).

Сандын абсолюттук чоңдугун жана аралыктын айрым касиеттерин көрсөтүп өтөлү:

1<sup>0</sup>. а)  $|a| \leq n$  деген  $-n \leq a \leq n$  менен,

б)  $|a| \geq n \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -n, \\ \text{же } a \leq n. \end{cases}$  тең күчтүү.

2<sup>0</sup>.  $|a+b| \leq |a|+|b|$ .

3<sup>0</sup>.  $|a-b| \geq |a|-|b|$ .

Бул касиеттердин далилдөөсү абсолюттук чоңдуктун аныктамасынан келип чыгат.

Рационалдык сандарды элестеткен чекиттер коңшуларын көрсөтө албаган деңгээлде тыгыз жайгашкандыктан, анык бир такталган конкреттүү санга жетүү, аны айырмалап бөлүп көрсөтүү процесси кошуна чекиттерди аралап, өзгөрүп кыймылдаган жакындоо менен ишке ашат деп элестетебиз. Ошондуктан конкреттүү рационалдык сандар менен кошо өзгөрүлмө рационалдык сандарды карап, аларды сан огундагы өзгөрүлмө чекиттер деп, аларды өзгөрүү кесиндилери менен чогуу карайбыз. Сан огунда каралуучу кесиндилердин учтары кесиндиге таандык же таандык эмес болгонуна жараша, аларды сегмент, интервал, жарым сегмент, жарым интервал деп бөлүштүрөбүз. Кесиндиде жаткан чекиттерди кыймылдуу сан өзгөрүлмөлөрү деп атап  $x, y, z, t, \dots$

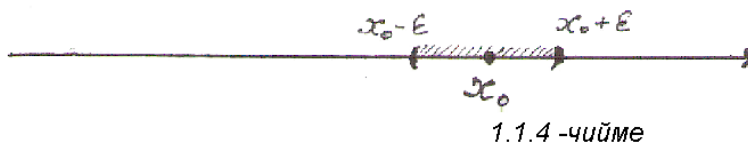
сыяктуу латын кыргыз тамгалары менен белгилейбиз.

**1.1.6 Аныктама.**  $a, b$  рационалдык сандарын арасында жайгашкан бардык  $x$  чекиттерин көптүгү:  $a \leq x \leq b$  шартын канааттандырышса, сегмент деп аталып,  $[a, b]$  символу менен белгиленет  $[a; b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ . Ал эми  $a < x < b$  шартын канааттандырышса, анда интервал деп аталып  $]a, b[$  кээде  $(a, b)$  символдору менен белгиленет:  $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ .

Бардык сегменттер кесиндин учтарындагы чекиттерди кошо кармап тургандыктан туюк аралык же туюк (кээде жабык) көптүк деп, ал эми интервалдар кесиндин учтарындагы чекиттерди кармап турбагандыктан, ачык аралык же ачык көптүк деп аталышат. Ошондой эле аралыктын

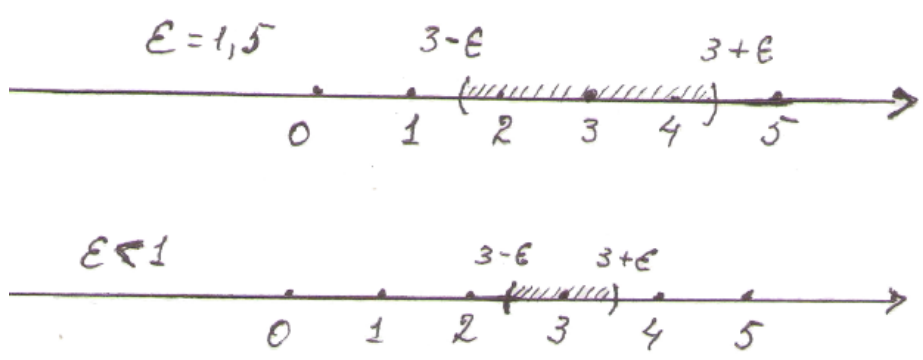
учтарын кармаганына жараша  $(a;b]=\{x:a < x \leq b\}$  жарым интервал,  $[a;b)=\{x:a \leq x < b\}$  жарым сегмент болушат.

**1.1.7 Аныктама.**  $x_0$  рационалдык санынын « $\varepsilon$  - чеке бели» же « $\varepsilon$  - аймакчасы» деп,  $x_0$  санынан  $\varepsilon$  аралыгынан узак эмес жайгашкан бардык сандардын (чекиттердин) көптүгү айтылат жана  $\omega_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  деп белгиленет. « $\varepsilon$  - аймакча» - интервал же ачык аралык катарында алынат (1.1.4 - чийме).



Бизди  $x_0$  рационалдык санына коңшулук деңгээлде жакын

жайгашкан сандар көбүрөөк кызыктыргандыктан,  $\varepsilon$  ду жетишерлик кичине оң сан деп эсептейбиз. Ошентип  $\varepsilon$  - аймакчада жайгашкан  $x$  чекиттери же



сандары

$\rho(x_0, x) = |x_0 - x| < \varepsilon$  шартын канааттандырат жана  $x$  чекиттери  $x_0$  чекитине чексиз жакын же андан чексиз кичине гана айырмаланат деп түшүнөбүз.

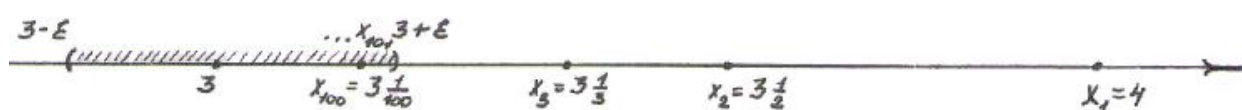
**1.1.8 Аныктама.** Эркибизче алынган жетишерлик кичине  $\varepsilon > 0$  санынын кандай тандалышына карабастан, берилген көптүктүн кандайдыр бир  $x_0$  элементин каалагандай  $\varepsilon$  - аймакчасында,  $x_0$  дөн башка да чексиз көп элементтери кошо кармалып турса, анда  $x_0$  элементин берилген көптүктүн пределдик элементи же коюулануу чекити деп атайбыз.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$  көптүктөрүндө пределдик элементтер же чекиттер жок, анткени каалагандай бүтүн сандын жакынкы  $\varepsilon$  - аймакчасында өзүнөн башка бир

да бүтүн сан жок болуп,  $\varepsilon$  санын 1 ден чоң деп тандаганда гана бир нече бүтүн сандар аймакчага кирип калышы мүмкүн (1.1.5 - чийме). Мисалы,

3 санын кичине  $\varepsilon$ -аймакчасында бир да бүтүн сан жок, ал эми  $\varepsilon = 1,5$  – деп аймакчаны жетишерлик чоңойтсок, анда  $\varepsilon$  - аймакчада эки 2, 4 бүтүн сандары жайгашкан болушат. Рационалдык сандардын көптүгүндө ар бир рационалдык сан пределдик чекит боло алат.

**Мисалы:**  $x_0 = 3$  рационалдык санынын пределдик чекит болорун көрсөтөлү:  $\triangleright \varepsilon = 0,01$  деп тандайлы да,



1.1.6 -чийме

$\rho(3, x) = |x - 3| < 0,01$  шартын канааттандырган канча  $x$  рационалдык сандары бар экенин тактайлы. Эсептөөгө ылайыкташтырып  $x$  сандарын

$x_n = 3 + \frac{1}{n}$  көрүнүштө болсун деп ойлойлу ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Анда

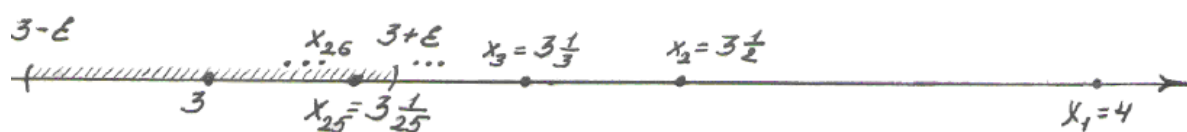
$$\rho(3, x_n) = |x_n - 3| = \left| 3 + \frac{1}{n} - 3 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < 0,01 \quad \text{же} \quad n > \frac{1}{0,01} = 100 = N_\varepsilon$$

болгон мезгилде бардык  $x_n$  сандары 3 санынын тандалган  $\varepsilon$  - аймакчасында жайгашары келип чыгат. Демек, алгачкы 100 сандагы  $x_n$  сандары гана  $\varepsilon = 0,01$  - аймакчанын сыртында болуп,  $x_{100}$  - чекити чек арада жайгашып, калган  $n = 101, 102, \dots$  номерлүү чексиз көп рационалдык сандар 3 санын  $\varepsilon = 0,01$  - аймакчасын ичинде жайгашкан болот (1.1.6 –чийме). Экинчи

жолу  $\varepsilon = 0,04$  деп тандалса, анда

$$\rho(x_n, 3) = |x_n - 3| = \left| \left( 3 + \frac{1}{n} \right) - 3 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon = 0,04 \quad \text{шартын} \quad n > \frac{1}{0,04} = 25 = N_\varepsilon$$

болгон номерлер менен белгиленген бардык  $x_n$  сандары канааттандырат.



1.1.7 -чийме

Ал эми  $N_\varepsilon = 25$  номери менен белгиленген  $x_{25}$  саны  $\varepsilon$  - аймакчасын чек арасында жайгашкан болот (1.1.7- чийме). Ошентип тандалган  $\varepsilon = 0,04$  санына жараша  $x_n$  сандарын алгачкы 24 мүчөсү гана 3 санын  $\varepsilon$ -аймакчасын сыртында, бирөөсү  $x_{25} = 3\frac{1}{25}$  саны чек арасында, калган  $x_{26}$  мүчөсүнөн баштап чексизге чейинки мүчөлөрү  $\varepsilon$ -аймакчанын ичинде жайгашкан болушат.

Тандалган  $\varepsilon = 0,01$ ,  $\varepsilon = 0,04$  сандарына жараша табылган  $N_\varepsilon = 100$ ,  $N_\varepsilon = 25$  номерлери  $\varepsilon$  кичинерсе чоңоюп,  $\varepsilon$  чоңойсо кичирейип андан көз каранды болот, ошондуктан  $N_\varepsilon$  номерине  $\varepsilon$  санын кошо  $N_\varepsilon$  же  $N(\varepsilon)$  көрүнүштө тиркеп жазышат. Демек, 1.1.8 – аныктамасына ылайык  $x_0 = 3$  саны, рационалдык сандардын көптүгүнө пределдик чекит боло алат жана математикалык тилде  $\{x_n\}$  – удаалаштыгын предели

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 + \frac{1}{n} \right) = 3$$

катарында белгиленип жазылат.  $\triangleleft$

Ар бир рационалдык  $x_0$  чекитин  $\varepsilon$ - чекке белинде эбегейсиз көп сандагы, коңшуларын көрсөтүүгө мүмкүн эмес болгон деңгээлде тыгыз жайгашкан рационалдык чекиттер жайгаша алат.  $x_0$  чекитин  $\omega_\varepsilon(x_0)$  аймагында чексиз көп рационалдык  $x_n$  чекиттери бар экенин көрсөтүүнүн чексиз көп ыкмалары бар. Ал үчүн  $x_n$  чекиттери деп  $x_0$  чекитине жыйналуучу жөнөкөй ыкмада жазылган

$$\left\{ x_0 + \frac{1}{n^2} \right\}, \left\{ x_0 + \frac{1}{9n} \right\}, \left\{ x_0 - \frac{1}{n^3} \right\}, \left\{ x_0 + \frac{(-1)^n}{n} \right\}, \dots \quad \text{ж.б.у.с.} \quad \text{удаалаштыктары}$$

боюнча кыймылдоочу чекиттердин тизмегин алуу жетиштүү.

**1.1.9 Аныктама.** *Кандайдыр бир эреже табылып, анын жардамы менен көптүктүн элементтеринен удаалаштык түзүп, пределдик чекитин аныктоо мүмкүн болсо, анда ал көптүктү ошол эрежеге карата мейкиндик деп айтабыз. Эгерде пределдик чекиттерин баары өзүнө таандык болсо, аны толук мейкиндик, ал эми пределдик чекиттерин толугу менен кармап тура албаса, толук эмес мейкиндик дейбиз.*

Элементтери эч бир эрежелерге баш ийбеген эркин элементүү көптүктөрдүн элементтерин тартиптештирип, айырмалап таанып, турмушта колдонуу мүмкүн эмес, ошондуктан каалагандай эле көптүк мейкиндик боло бербейт. Мейкиндик болгон көптүктөрдүн элементтери кайсы бир эрежеге баш ийип тартиптештирилгендиктен, алардын жардамы менен көптүктөрдү чөйрөдөгү кубулуштарга салыштырып, турмуштук маселелерди чечүүдө кеңири колдонуу мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз. Иш жүзүндө практикалык муктаждыкка жараша, көптүктөрдүн арасынан өзүбүз ойлоп тапкан тартиптештирүү эрежелерин негизинде (амалдар, аралык ж.б.у.с.), колдонуу ыңгайына карап, керектүү арифметикалык, вектордук, матрицалардын мейкиндиктерди түзүп, ат коёбуз.

***$Q$  - “аралык” эрежеси аркылуу аныкталган предел амалы менен тартиптештирилген толук эмес ченелүүчү (метрикалык) мейкиндик болот.***

Анткени, жогоруда ар бир рационалдык сан пределдик чекит болорун, түзүлгөн удаалаштыктарга карата аралыктарды ченеп баалоо менен ага жакындап келүү ыкмасын көрсөтүүгө болорун түшүндүрдүк. Бирок,  $Q$  толук эмес мейкиндикти түзөт, анткени ал өзүнүн бардык пределдик чекиттерин толук кармап тура албайт. Ошентип, рационалдык сандардын толук эмес мейкиндигинде  $\lim$  – предел амалы толук аткарылбаганы менен, бардык арифметикалык төрт амалдардын натыйжасы да рационалдык сан болуп, бул амалдарга карата  $Q$  ( “+”, “-”, “×”, “:” ) туюк мейкиндик болот.  $Q$  рационалдык сандары теориялык жактан  $N$ ,  $Z$  көптүктөрү сыяктуу эле санактык кубатына ээ же аларга эквиваленттүү болгону менен, алардан айырмаланып 1.1.5 - аныктамасында киргизилген аралыкты ченөө эрежесине карата аныкталган предел амалына карата толук эмес ченелүүчү мейкиндикти түзөт.

#### **1.1.4 Рационалдык сандарды кеңейтүү. Чыныгы сандардын мейкиндиги**

Реалдуу чөйрөдө түз сызык бойлой жайгашкан бөлүкчөлөрдүн баарын рационалдык сандарды элестеткен чекиттер менен сүрөттөй

албайбыз, анткени түз сызыктагы (сан огундагы) айрым чекиттерди белгилөөгө рационалдык сандар жетишсиздик кылат.

**Мисалы,** Сан огунда  $\sqrt{2}$  санына туура келүүчү чекит рационалдык чекит болбойт же  $\sqrt{2}$  рационалдык эмес сан.

**Далилдөө.**  $\triangleright$  Чынында эле, тескерисинче  $\sqrt{2}$  санын рационалдык сан деп болжолдосок, анда аны  $\frac{p}{q}$  түрдөгү кыскарбас бөлчөк көрүнүштө

жаза алабыз  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ . Бул барабардыктын эки жагын тең квадратка

көтөрүп  $2 = \frac{p^2}{q^2}$ , (\*)

же  $p^2 = 2q^2$  теңдештигине ээ болуп,  $p$  нын жуп сан болорун көрөбүз. Андай болсо,  $p$  ны жуп сан катарында  $p = 2n$  деп алууга болот. Бул маанини (\*) теңдештигине коюп,  $(2n)^2 = 2q^2$  же  $q^2 = 2n^2$  теңдештигине келебиз. Мындан  $q$  да жуп сан экендиги келип чыгат. Демек, алымы жана бөлүмү жуп сандар болгондуктан кыскаруучу бөлчөк келип чыгып,  $\sqrt{2}$  саны кыскарбас бөлчөк көрүнүштөгү рационалдык сан болот деген болжолубуз туура эмес болот, же  $\sqrt{2}$  рационалдык сан боло албайт. Бирок,  $\sqrt{2}$  санын жакындаштырып тегеректелген тамырлары рационалдык сандар болуп, улам  $\sqrt{2}$  санына умтула жакындап келе берген рационалдык сандардын удаалаштыгын түзүшөт же  $\sqrt{2}$  рационалдык сан болбосо да  $Q$  көптүгүнө пределдик чекит болот:

1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41423, 1,414235, ...  $\rightarrow \sqrt{2}$  же  $\sqrt{2} \approx 1,414235... \triangleleft$

Сан огунда рационалдык сандар менен сүрөттөлбөгөн,  $\sqrt{2}$  саны сыяктуу чексиз көп чекиттер бар. Мындай чекиттерге тиешелеш коюлган жаңы сан - моделдерди иррационалдык (бөлчөк эмес) сандар деп атап, алардын көптүгүн  $J$  тамгасы менен белгилейбиз. Иррационалдык сандар рационалдык сандардын мейкиндигине пределдик чекиттер болушат, анткени ар бир иррационалдык сандын чексиз кичине  $\varepsilon$  - чеке белинде чексиз көп рационалдык сандар жайгашкан. Жогоруда  $\sqrt{2}$  иррационалдык санына, анын тегеректелген тамырларын маанилери болушкан рационалдык сандардын удаалаштыгы жыйналарын сөз кылдык. Ошентип  $Q$  мейкиндиги өзүнүн бардык рационалдык пределдик чекиттерин толук кармап турганы менен, чексиз көп иррационалдык пределдик чекиттерин кармап тура албаган толук эмес мейкиндик болот.

$N, Z, Q$  көптүктөрүнөн айырмаланып,  $J$  көптүгүндө саноого мүмкүн эмес деңгээлдеги көп элементтер бар болуп, санактык эмес көптүктү түзөт. Иррационалдык сандардын көптүгүн кубаты же элементтерин саны  $\mu(J) > a$  болуп, аны  $\mu(J) = c$  көрүнүштө белгилеп, континуум кубаты деп айтабыз.

Рационалдык жана иррационалдык сандарды айырмалап таануу үчүн, аларды ондук бөлчөк көрүнүштө жазуу эрежелерин көрсөтөбүз.

**1.1.10 Аныктама.** Бөлүмү 10 санын бүтүн даражаларынан турган бөлчөк санды ондук бөлчөк деп айтабыз.

Каалаган эле  $a$  бүтүн санын  $\frac{a}{1} = \frac{a}{10^0} = a, 0$  ондук бөлчөгү деп түшүнүүгө болот. Мисалы  $\frac{p}{q}$  көрүнүштөгү бөлчөк санды ондук бөлчөк көрүнүштө жазып көрсөтөлү:

$$\frac{5724176}{10000} = 572 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{6}{10^4} = 572,4176, \text{ ал эми}$$

$$\frac{28}{5} = \frac{28 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{56}{10} = 5,6 = 5 + \frac{6}{10}, \quad \frac{59}{40} = \frac{59 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5 \cdot 5^2} = \frac{59 \cdot 25}{(2 \cdot 5)^3} = \frac{1475}{1000} = 1,475 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3}$$

көрүнүштөгү ондук бөлчөктөр деп түшүнүүгө болот.  $\frac{p}{q}$  бөлчөк санын

ондук бөлчөк түрүндө жазуу үчүн  $p$  ны  $q$  га бөлүү эрежеси колдонулуп, үтүрдүн сол жагында бүтүн бөлүгү, оң жагында бөлчөк бөлүгү көрсөтүлөт. Эгерде бөлчөктүн бөлүмү  $q$  саны 2 менен 5 сандарынан башка жок дегенде бир жөнөкөй бөлүүчүнү кармап турса, анда  $p$  ны  $q$  га бөлүү процесси бүтпөстөн, чексизге чейин улана берет.

**Мисалы.**  $\frac{965}{132}$  санында  $q = 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$  бөлүмү 2 санынан башка 3, 11 деген эки жөнөкөй бөлүүчүлөрү бар, ошондуктан бөлүү эрежесин аткарганда  $\frac{965}{132} = 7,310606\dots$  тийиндисинде 0, 6 цифралары чексизге чейин улам кайталана берет, аларды ондук бөлчөктүн мезгили деп, мезгилин (06) көрүнүштө кашаанын ичине жазып көрсөтөбүз:  $\frac{965}{132} = 7,31(06)$ .



Терс рационалдык сандар да ушундай эле тартипте жазылып, алдына « - » белгиси коюлат. Ошентип каалаган рационалдык сан чектүү ондук же мезгилдүү чексиз ондук бөлчөк көрүнүшүндө жазылышат.

Ал эми иррационалдык сандар мезгилсиз чексиз ондук бөлчөк көрүнүштө гана жазылышат. Арифметикалык амалдарды аткарууда иррационалдык сандын ордуна тегеректеп алынган рационалдык сандарды колдонобуз. Мисалы,  $\sqrt{2}$  иррационалдык санын ордуна анын тегеректелген мааниси 1,41 рационалдык санын, ал эми  $\pi$  иррационалдык санын ордуна ага жакындаштырылган 3,14 рационалдык санын алууга болот. Кээде иррационалдык санды тегеректебей эле  $\pi$ ,  $e$ , ж.б. сыяктуу тамгалар менен белгилеп, иррационалдык сандарды логарифмдөө, тригонометриялык эсептөө, тамыр чыгаруу амалдарында тамга көрүнүштөгү сандар катарында жазышат. Мисалы тегеректин аянтын формуласында  $S = \pi R^2$ , айлананын узундугунда  $C = 2\pi R$ , негизи  $e$  саны болгон логарифмде  $\ln x$  ж.б.у.с.

**1.1.11 Аныктама.** Бардык рационалдык жана иррационалдык сандардын көптүктөрүн биригүүсү чыныгы сандардын көптүгү деп аталып,  $R$  тамгасы менен белгиленет.

$R$  көптүгү аралык эрежесине карата толук мейкиндик болот, б.а. өзүнүн бардык пределдик чекиттерин кармап турат. Демек,  $Q \cup J = R$  жана  $N \subset Z \subset Q \subset R$ ,  $J \subset R$  деп түшүнүүгө болот. Ошентип  $R$  чыныгы сандарын көптүгүнөн  $J$  иррационалдык сандарын чыгарып салсак,  $Q$  рационалдык сандарын көптүгү келип чыгат, б. а.  $R \setminus J = Q$  жана  $R$  ден

$Q$  ну чыгарып салсак,  $J$  ны алабыз  $R \setminus Q = J$ .  $R$  көптүгүн элементтерин саны же кубаты, теориялык жактан  $J$  көптүгүнө тең деп эсептелип,  $\mu(R) = \mu(J) = c$  континуум кубатына ээ болот же  $a + c = c$  деп эсептейбиз.  $Q$  көптүгүнөн айырмаланып,  $R$  мейкиндигинде “тамыр чыгаруу” жана предел амалдары толугу менен аткарылат, б.а. айтканда

$\forall r \in R \Rightarrow \sqrt[n]{r} \in R (n \geq 2) \wedge \forall x_n \in R: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow a \in R$  же  $R$  (“+”, “-”, “ $\times$ ”, “:” “ $\sqrt{\quad}$ ”, “ $a^n$ ”, “lim”) амалдарына карата туюк.

**$R$  чыныгы сандарын мейкиндиги кандай артыкчылыктарга ээ экендигин санап өтөлү:**

1. Сан огунда  $Q$  сандары менен белгиленген чекиттер канчалык тыгыз жайланышса да, арасында рационалдык сандар менен

белгиленбеген бош чекиттер калып кетип, туташ сызыкты түзбөстөн жылчыктуу сызыкты түзөт. Ошондуктан рационалдык сандардын өздөрү гана жайгашкан кесиндин узундугун так ченөө мүмкүн эмес, анткени бош жылчыктар аралыкка кирбей калат. Чыныгы сандарды пайдаланууда мындай кемчилдик жок, анткени сан огунда чыныгы сан менен белгиленбеген бир да чекит калган эмес, б. а. сан огундагы бардык чекиттер менен  $R$  чыныгы сандарын ортосунда өз ара бир маанилүү тиешелештик орнотулуп,  $R$  сандары үзгүлтүксүз сызык же көптүк катарында сүрөттөлүп, ченөө иштерин толук жүргүзүүгө кудурети жетет. Ошондуктан аралык (метрика) эрежеси боюнча  $Q$  ну ченелбөөчү, ал эми  $R$  ди ченелүүчү көптүк дейбиз. Чыныгы сандар менен белгиленген сызык бойлой жайгашкан кубулуштарды чекиттер деп ойлоп, алардын үзгүлтүксүз реалдуу абалдагы өзгөрүүлөрүн таанып үйрөнө алабыз.

2. Ар бир чыныгы сан пределдик чекит болуп,  $R$  көптүгү бардык пределдик чекиттерин өзүндө кармап тура алат, б.а. аралык эрежесине карата толук мейкиндик болот. Аралык эрежеси боюнча чекиттердин кыймылдоо механизмин түшүндүргөн предел аппараты үзгүлтүксүз жүрүп, ар бир чекитке тийип аралап өтөт деп эсептейбиз.

3. Сан көптүктөрүн ичинен чыныгы сандар эң көп элементтүү же чоң кубатка ээ болгон көптүк болот:  $\mu(Q) = a$ ,  $\mu(R) = c$  жана  $c > a$ . Ааламдын түзүлүү тартиби татаал жана табышмактуу, анын кичинекей эле бөлүгүндө чексиз көп континуум кубатына ээ сандагы бөлүкчөлөр жайгашкандыктан, ааламдын сандык моделдерин бири катарында түзүлгөн  $R$  мейкиндигиндеги ар бир сегментте же интервалда континуум кубатындагы санда чекиттер бар.  $\mu([a; b]) = \mu((a; b)) = \mu([c, d]) = \mu(R) = c$ , б.а.  $R$  мейкиндиги өзүндө кармалып турган бардык аралыктарга эквиваленттүү жана бардык аралыктар да бири – бирине эквиваленттүү болушат.

Ошентип чыныгы сандар 1.1.5 – аныктамасындагы аралыкты ченөө эрежесине (метрикага) карата бир ченемдүү мейкиндикти түзүп, кыялыбызда гана жашаган символдор же белгилер болгонуна карабастан ааламдын түзүлүшүнө окшоштурулуп түзүлүп, адамдын таануу процессинде негизги математикалык тилдин негизги тамгалары же каражаты катарында кызмат кылат. Мындан ары атайын эскертүүсүз сөз кылынган сандардын баарын чыныгы сандар деп түшүнөбүз. Айрым

учурларда чыныгы сандарды алгебралык, трансценденттик деп бөлүп айтышат, анын мааниси төмөндөгүчө: Коэффициенттери бүтүн сандар болгон

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad x \in R, \quad n \in N, \quad a_i \in Z \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

сыяктуу көп мүчөлөргө карата түзүлгөн  $n$ -тартиптеги  $P(x) = 0$  теңдемесине чечимдер болушкан чыныгы сандарды алгебралык сандар, ал эми бир да мындай теңдемелерге чечим боло албаган чыныгы сандарды трансценденттик сандар деп айтабыз. Мисалы  $x = 3$  саны алгебралык сан, анткени ал экинчи тартиптеги бүтүн коэффициенттүү көп мүчөгө карата түзүлгөн  $x^2 - 9 = 0$  теңдемесине чечим болот.  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$  чыныгы сандары да алгебралык сандар болушат, себеби  $2x^2 - x - 1 = 0$  бүтүн коэффициенттүү экинчи даражадагы теңдемен чечимдери болушат.  $\sqrt{2}$  - иррационалдык саны да  $x^2 - 2 = 0$  бүтүн коэффициенттүү теңдемеге чечим болгондуктан, алгебралык сан болот. Демек, иррационалдык сандардын арасында алгебралык жана трансценденттик сандар кездеше берет. Коэффициенттери бүтүн сандар болушкан теңдемелердин саны санактык сандан ашпагандыктан, алардын чечимдерин көптүгү болгон алгебралык сандар да санактык көптүк болот. Ал эми трансценденттик сандар эбегейсиз көп болуп, континуум кубатына ээ. Практикалык колдонуу ыңгайына жараша айрым трансценденттик сандарды тамгалардын же символдордун жардамы менен жазабыз:  $e, \pi, \sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \dots$

Бардык трансценденттик сандар иррационалдык сандар болгону менен, тескерисинче бардык иррационалдык сандар трансценденттик боло беришпейт. Трансценденттик деген сөз латындардын «transcendens» сөзүнөн алынып, «чектен чыгуу» деген маанини билдирет.

### **1.1.5 Удаалаштыктардын пределин табуу ыкмалары**

Табыятта болуп жаткан айрым кубулуштар жана окуялар сан удаалаштыктарына окшош кыймылдуу абалдарды башынан кечирип, пределдик бүтүү чекитине келип токтойт же чексиздикке тарайт. Ошондой эле чыныгы сандарга окшотуп, чөйрөдөгү адам көзүнө көрүнбөгөн атомдук деңгээлдеги майда микро – дүйнөдө, же эбегейсиз

чоң макро – дүйнөдө болгон кыймылдарды жанына барып байкоо мүмкүн эмес болгондуктан, алардын натыйжасын пределдик абалдары боюнча гана баалап үрөнүүгө болот. Ошондуктан, коңшуларын көрсөтүүгө мүмкүн эмес деңгээлде чексиз тыгыз жайгашкан аалам бөлүкчөлөрүн удаалаштыктын мүчөлөрү менен пределдик чекиттер сыяктуу кароого болот.

Таанып билүү процессиндеги удаалаштыктардын өзгөчө ролун эске алып, алардын айрым касиеттерине жана пределин табуу эрежелерине токтолуп өтөбүз.

Сан огундагы кайсы бир  $[a; b]$  аралыгында өзгөрүлүүчү  $x$  чекиттеринен

$\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  чексиз удаалаштыгы түзүлүп,  $x_0$  чекитине жакындасын деп ойлойлу. Анын жыйналуу абалын аралыктарды баалоо жолу менен жогоруда (1.1.3 тө) мисалдарда каралгандай

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon : n > N_\varepsilon \Rightarrow \rho(x_0, x_n) = |x_n - x_0| < \varepsilon$  шарты аткарылуусуна жараша түшүндүрөбүз. Мындайча айтканда, эркин алынган жетишерлик кичине  $\varepsilon > 0$  санына жараша табылган  $N_\varepsilon$  номерлеринен чоң номерлер менен белгиленген удаалаштыктын чексиз көп  $x_n$  мүчөлөрү,  $x_0$  санынан чексиз кичине чоңдукка гана айырмаланып турушса, же анын чексиз кичине  $\varepsilon$  – чеке белинде жайгашса, б.а.

$\exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon : x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$ , анда  $\{x_n\}$  удаалаштыгын  $x_0$  чекитине жыйналат деп айтабыз. Эгерде эркин алынган  $\varepsilon > 0$  санына карата айтылган шартты канааттандыруучу  $N_\varepsilon$  номери табылбаса, анда удаалаштыкты таралуучу дейбиз. Бул учурда  $x_0$  чекитинин чексиз кичине  $\varepsilon$  – чеке белинде удаалаштыктын чектүү сандагы мүчөлөрү гана жайгашып же бир да мүчөсү жайгашпай, чексиз көп мүчөлөрү чеке белдин сыртында калышат. Бирок, пределдик чекитти же удаалаштыктын пределин табуунун мындай ыкмасы бир топ убарагерчиликти жаратат. Ошондуктан предели табуунун **алгебралык эсептөө ыкмасы** түзүлгөн.  $\{x_n\}$  удаалаштыгы  $x_0$  чекитине умтулат же жыйналат дегенди

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad n \in N$$

көрүнүштө жазып, ага карата:

1<sup>0</sup>. Турактууну пределдин сыртына чыгарууга болот

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \cdot x_0;$$

2<sup>0</sup>.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$  болсо,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0 \pm y_0 \text{ болот};$$

3<sup>0</sup>.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0 \cdot y_0$ ;

4<sup>0</sup>.  $y_0 \neq 0$  болгондо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{x_0}{y_0}$$

эсептөө эрежелерин киргизебиз. Пределди

эсептөөдө бул эрежелер аркылуу бардык алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдү ыңгайына карата пайдалана берүүгө болот.

Удаалаштыктардын пределдин мааниси чектүү сан, нөл же чексиз сан болушу мүмкүн. Айрым удаалаштыктардын предели таптакыр жашабайт же аныктоого мүмкүн эмес болуп, мүчөлөрүн коюуланышын көрсөтө албайбыз.

**1.1.12 Аныктама.** *Нөл пределине ээ болгон  $\{x_n\}$  удаалаштыгы чексиз кичине чоңдук же чексиз кичине (ЧК) деп, ал эми « $\infty$ » пределине ээ болгондо чексиз чоң чоңдук же чексиз чоң (ЧЧ) деп аталышат.*

Демек, «ЧК» учурунда удаалаштыктын чексиз көп мүчөлөрү кайсы бир  $N_\varepsilon$  номеринен баштап 0 санынын чексиз кичине  $\varepsilon$  - аймакчасында болуп, чектүү сандагы алгачкы мүчөлөрү гана бул аймакчанын сыртында калышы мүмкүн. «ЧЧ» учурунда удаалаштыктын чексиз көп мүчөлөрү  $N_E$  номеринен баштап эбегейсиз чоң деп эсептелген  $E$  оң санынан чоң болуп,  $|x_n| > E$  ( $n > N_E$ ) барабарсыздыгын канааттандырып, чектүү сандагы алгачкы мүчөлөрү гана андан кичине боло алат.

Чексиз кичине чоңдуктарды жалпы  $\{x_n\}$  удаалаштыктарынан айырмалап,  $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \dots$  сыяктуу тамгалар менен белгилейбиз. Ошентип,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  пределине ээ болсо, анда  $x_n = x_0 + \alpha_n$  болуп, удаалаштыктын  $n > N_\varepsilon$  номерлери менен белгиленген мүчөлөрү  $x_0$  пределден чексиз кичине чоңдукка гана айырмаланганын көрсөтөт.

Чексиз кичине чоңдуктарды чектүү  $a$  санына көбөйтсөк да чексиз кичине чоңдук бойдон кала берет. Ошондой эле чектүү сандагы чексиз кичине чоңдуктардын суммасы да чексиз кичине чоңдук болот.

Чексиз чоң чоңдуктарда удаалаштыктын алгачкы мүчөлөрү анчалык чоң болбосо да, кайсы бир  $N_E$  номеринен баштап  $x_n > E$  же  $x_n < -E$  ( $E$  эбегейсиз чоң оң сан) шарты аткарылат. Бул учурларда удаалаштыктын предели "+∞" же "-∞" болот деп айтып,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  же  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  көрүнүштөрдө жазабыз. Жалпы учурда чексиз чоң чоңдукту  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$  деп түшүнүүгө болот. Чоң чоңдуктарды чектүү  $a$  санына көбөйтүүдөн жана чектүү сандагы чексиз чоң чоңдуктарды суммалоодон анын чоңдугу бузулбайт.

Чексиз кичине жана чоң чоңдуктардын  $0$  жана  $\infty$  сандарына жакындоо ылдамдыктары ар кандай болуп, жыйынтыгында бирөө ылдам экинчиси жайыраак болсо да пределдик чексиз маанисине жетишет. Чексиз кичине жана чоң чоңдуктар өз ара тескери

$$\text{чон} = \frac{1}{\text{кичине}}, \quad \text{кичине} = \frac{1}{\text{чон}} \quad \text{байланышта болушат.}$$

Пределди алгебралык эрежелер менен эсептөөдө ( $a$  чектүү сан болгондо)

$$\frac{a}{\infty} = 0, \quad a \cdot \infty = \infty, \quad \frac{\infty}{a} = \infty, \quad \frac{a}{0} = \infty, \quad a^\infty = \infty \quad (a \neq 1), \quad \frac{0}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{0} = \infty \quad \text{деп}$$

алынышып, ал эми

$$"\frac{0}{0}", \quad "\frac{\infty}{\infty}", \quad "0 \cdot \infty", \quad "\infty - \infty", \quad "1^\infty", \quad "0^0", \quad "\infty^0" \quad \text{болгон учурларды}$$

эсептөөгө мүмкүн эмес - аныксыздыктар дейбиз. Алгебралык өзгөртүп түзүү менен аныксыздыкты пайда кылуучу чоңдуктарды жоюштурууга, кыскартып жиберүүгө болот. Ал үчүн удаалаштыктардын аныксыздыктарга айлануу ылдамдыктарын салыштырууга мүмкүн болгондой алгебралык теңдеш өзгөртүүлөр жүргүзүлүп, аныксыздыктар нейтралдаштырылат. Мындай учурда аныксыздыкты ачууга болот дейбиз (нейтралдашпаса аныксыздык бойдон кала берет).

Удаалаштыктардын пределдик чекитке жетүү механизми ырааттуу жүрүш сыяктуу процесс болуп эсептелип, алар чексиз көп чыныгы сандардын арасында жайгашкан удаалаштыктын мүчөлөрү аркылуу,

тартибин бузбай натуралдык сандар менен номерленген сандар боюнча секирип олтуруп, пределдик чекитке жетишет.

*Эгерде  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , болуп  $x_0 > p$  ( $x_0 < p$ ) болсо, анда  $\{x_n\}$  удаалаштыгын мүчөлөрү, кайсы бир номерден баштап  $p$  санынан чоң (кичине) боло баштайт деп түшүнүү керек ( $p$  чектүү сан).*

*Жыйналуучу удаалаштыктын предели бирөө гана болуп, сан огонда пределдик чекитке оң же сол жактардан же эки жактан тең умтулуу болот.*

Удаалаштыктын предели жашаганы менен, аны табуу же бар экендигин далилдөө кыйынчылык жараткан учурлар да кездешет. Мындай учурларда удаалаштыктарды башка удаалаштыктар менен салыштыруу, мүчөлөрүнүн өсүү же кемүү тартибинде жазылышы, мүчөлөрүнүн өз ара жакын жайгашуусу сыяктуу абалдардын натыйжасында болжол бүтүмдөр чыгарылат.

### **I. Кошинин болжол бүтүмү (принципи).**

*Эркин тандалган жетишерлик кичине  $\varepsilon$  оң санына жараша  $N_\varepsilon$  номери табылып,  $n, m > N_\varepsilon$  номерлери үчүн  $\rho(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < \varepsilon$  шарты аткарылса, анда  $\{x_n\}$  удаалаштыгы сөзсүз жыйналат.*

Бул жыйналуучулуктун зарыл жана жетиштүү шарты болуп,  $\{x_n\}$  фундаменталдык удаалаштык деп аталат. Демек, жыйналуучу удаалаштыктын мүчөлөрү улам коюуланып олтуруп, кайсы бир  $N_\varepsilon$  номеринен баштап бири – бирине минишкендей чексиз жабыша жакындап, айырмаланбай турган деңгээлге чейин жакыдап барышат.

### **II. Чектелген удаалаштыктын предели же Больцано – Вейерштрассын леммасы.**

Кайсы бир чектүү  $[a; b]$  аралыгында жайгашып, мүчөлөрү  $a \leq x_n \leq b$  шартын канааттандырган  $\{x_n\}$  удаалаштыгын чектелген удаалаштык деп айтабыз. Мында  $a$  - саны удаалаштыктын төмөнкү чеги,  $b$  - саны жогорку чеги болушат.

Айрым учурларда удаалаштык жогору же төмөн жагынан гана чектелип, экинчи жагынан чектелбейт. Удаалаштык бир жагынан эле же эки жагынан тең чектелбесе, анда чектелбеген деп аталат. Ар дайым эле чектелген удаалаштыктарды чектүү пределге ээ болот деп айтууга

болбойт, бирок алардын мүчөлөрүн арасынан тандап терип алып, жыйналуучу удаалаштыктарды түзүүгө же бөлүп алууга болот.

*Лемма.* Каалагандай чектелген  $\{x_n\}$  удаалаштыгын мүчөлөрүнүн арасынан терип алып, сөзсүз чектүү пределге ээ болуучу көптөгөн курама удаалаштыктарды түзүүгө болот. Курама удаалаштыктардын пределдерин эң чоңу «жогорку предел»  $\overline{\lim} x_n$ , эң кичинеси «төмөнкү предел»  $\underline{\lim} x_n$  деп аталышат. Жыйналуучу удаалаштыктарда жогорку жана төмөнкү пределдер дал келишип, удаалаштыктын пределине тең болушат, б.а.  $\overline{\lim} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim} x_n$ .

Айрым адабияттарда бул лемма Больцано – Кошинин аты менен берилген.

### III. Монотондуу удаалаштыктын предели же Вейерштрассын теоремасы.

Эгерде  $\{x_n\}$  удаалаштыгын мүчөлөрү монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болуп жогору (төмөн) жагынан чектелген болсо, анда ал сөзсүз жыйналуучу удаалаштык болуп, чектүү пределге ээ болот.

### IV. Салыштыруу ыкмалары.

а) Берилген  $\{x_n\}$  жана  $\{y_n\}$  удаалаштыктарын мүчөлөрү кайсы бир номерден баштап  $\forall n \in N$  үчүн  $x_n \leq y_n$  шартын канааттандырса, анда  $\{y_n\}$  удаалаштыгын жыйналуучу болушунан, андан кичине болгон  $\{x_n\}$  удаалаштыгын да жыйналуучулугу келип чыгат. Тескерисинче,  $\{x_n\}$  удаалаштыгы таралуучу болсо, андан чоң болгон  $\{y_n\}$  удаалаштыгы да таралуучу болот.

б) Эгерде  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$  удаалаштыктарын мүчөлөрү кайсы бир орундан баштап  $\forall n \in N$  үчүн  $x_n \leq y_n \leq z_n$  шартын канааттандырышса жана  $\{x_n\}$ ,  $\{z_n\}$  удаалаштыктары жыйналуучу болуп, жалпы бир  $c$  пределине ээ болушса, анда мүчөлөрү экөөнүн арасында жайгашкан  $\{y_n\}$  удаалаштыгы да жыйналуучу болуп, ошол эле  $c$  пределине ээ болот же

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c.$$



Удаалаштыктын пределин маанисин билбей туруп, анын жыйналуучу экендигин болжолдоп билүүнүн жогорудагы ыкмаларына мисал катарында, “экинчи сонун предел” деп аталуучу  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  удаалаштыгын жыйналуучу экендигин далилдөөнү көрсөтөлү.

### 1.1.6 e - саны

Монотондуу удаалаштыктын предели жөнүндөгү Вейерштрассдын теоремасын жана салыштыруу ыкмасын пайдаланып, **экинчи сонун предел** деп аталып, кеңири колдонулган  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  формуласын келтирип чыгарабыз.

▷  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  удаалаштыгын  $n$  ге натуралдык  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$

маанилерди берүү менен  $2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$  көрүнүштө жазалы. Анын мүчөлөрүн эсептеп, салыштырып көрүп улам монотондуу (ырааттуу) өсүүчү экенин байкайбыз, бирок жалпы учурда  $x_n < x_{n+1}$  болооруна ишенүү үчүн Ньютондун биномун пайдаланып, удаалаштыктын жалпы  $x_n$  мүчөсүн  $n$ - даражага көтөрөбүз:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 \cdot 1^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_n^1 1^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^1 + C_n^2 1^{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \\ &+ C_n^3 1^{n-3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + C_n^k 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots + C_n^n 1^0 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots \\ &+ \frac{n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

$n$ - номерден  $(n+1)$  - номерге өтүп,  $x_{n+1}$  - мүчөсүн Ньютондун биному менен  $(n+1)$  - даражага көтөрүп ажыратсак, (1) сыяктуу оң сандардын

суммасы келип чыгып, кашаалардагы  $\left(1 - \frac{s}{n}\right)$  оң сандарын ордуна, алардан чоңураак  $\left(1 - \frac{s}{n+1}\right)$  оң сандары жазылат ( $s = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ).

Себеби, экинчи кашаада 1 ден  $\frac{s}{n}$  ге караганда кичинерээк болгон  $\frac{s}{n+1}$  кемитилип жатат. Мындан сырткары (1) де  $n$  кошулуучу болсо, кийинки ажыратууда  $n+1$  кошулуучу болот. Натыйжада бардык кошулуучулар чоңоёт жана дагы бир оң кошулуучу кошулат. Чынында эле

$$\frac{s}{n} > \frac{s}{n+1} \text{ болгондуктан,}$$

$\left(1 - \frac{s}{n}\right) < \left(1 - \frac{s}{n+1}\right)$  барабарсыздыгы орун алат. Демек  $x_{n+1} > x_n$  же удаалаштык монотондуу өсүүчү болот.

Берилген удаалаштыктын жогору жагынан чектелген экендигин көрсөтөлү. Ал үчүн (1) кошулуучулардын ар бириндеги  $\left(1 - \frac{s}{n}\right)$  сыяктуу кашааларда турган, бирден кичине болгон көбөйтүүчүлөрдү таштап жиберип, математикалык индукция усулу менен далилденген, бардык  $n > 4$ ,  $n \in N$  сандары үчүн туура деп эсептелген  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$

барабарсыздыгын эске алып,

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

барабарсыздыгына ээ болобуз. Акыркы сумма экинчи кошулуучудан

баштап  $q = \frac{1}{2}$ ,  $b_1 = \frac{1}{2}$  болгон геометриялык прогрессияны түзгөндүктөн,

алгачкы  $n$  мүчөсүн суммасын формуласы боюнча

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \text{ ээ болуп, } x_n < 2 + 1 - \frac{1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^n} < 3$$

натыйжасына келебиз. Демек,  $\forall n \in N$  үчүн  $x_n < 3$  же  $\{x_n\}$  удаалаштыгы жогору жагынан чектелген. Андай болсо, Вейерштрасстын бүтүмү боюнча анын чектүү предели сөзсүз жашайт деген тыянак чыгарабыз. Ал предел ( $\forall n \in N: 2 < x_n < 3$ ) эки менен үч сандарын арасында жайгашканы

белгилүү болгону менен, анын так маанисин жакындаштырып гана таба алабыз. Бул пределдин сандык мааниси Эйлердин урматына  $e$  тамгасы менен белгиленген  $e = 2,718281828459045\dots$  иррационалдык сан болот.

Ошентип  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  формуласы " $1^\infty$ " аныксыздыгын ачууда

колдонулуп, «экинчи сонун предел» деп аталат. Негизи  $e$  саны болгон  $\log_e x$  натуралдык логарифм деп аталып,  $\ln x$  көрүнүштө жазылат. Бул пределге «сонун» деген аттын берилиши, чектүү сандагы «1» сандарын көбөйтүндүсү 1 ге барабар болгону менен, 1 санына жетишерлик чексиз жакын жайгашкан сандардын чексиз көбөйтүндүсү бирге жакындабай, андан жетишерлик узактыкта жайгашкан  $e$  санына жакындарын көрсөткөндүгү менен байланышкан. <

### Мисалдар

1.  $x_n = \frac{2n-3}{3n}$  удаалаштыгын жыйналуучулугун « $\varepsilon$ -тилинде» жана алгебралык ыкмада далилдеп, монотондуулугун аныктагыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright n = 1, 2, 3, \dots$  маанилерин коюп удаалаштыктын бир канча мүчөлөрүн жазалы:

$$-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{7}{15}, \dots$$

Жазылган мүчөлөрдү салыштырып, алардын монотондуу өсүүчү экендигин байкайбыз. Бирок, анын бардык мүчөлөрүндө монотондуулук сакталарын билүү үчүн  $\forall n: x_{n+1} > x_n$  аткарылышын көрсөтүүгө

тийишпиз.  $x_{n+1} = \frac{2(n+1)-3}{3(n+1)} = \frac{2n-1}{3n+3}$  болгондуктан,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n-1}{3n+3} - \frac{2n-3}{3n} = \frac{6n^2 - 3n - 6n^2 + 9n - 6n + 9}{(3n+3) \cdot 3n} = \frac{9}{9n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

келип чыгат ( $n \in N$ ). Мындан  $\forall n \in N: x_{n+1} > x_n$  болуп, удаалаштыктын мүчөлөрү монотондуу өсүүчү болору белгилүү болот.

Удаалаштыктын чектүү  $x_0 = \frac{2}{3}$  пределине ээ болорун эки ыкмада көрсөтөлү:

а) « $\varepsilon$  - тилинде» же аралык чендерин салыштыруу ыкмасында :

Эркин тандалган  $\varepsilon > 0$  снын алып,  
 $\rho(x_n, x_0) = |x_n - x_0| = \left| \frac{2n-3}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2n-3-2n}{3n} \right| = \left| \frac{-3}{3n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$  шарты кайсы  $N_\varepsilon$

номери менен белгиленген мүчөдөн кийинки бардык  $x_n$  мүчөлөрү  
 $(n > N_\varepsilon)$  үчүн аткарыларын көрсөтөлү. Акыркы барабарсыздыктан  $n > \frac{1}{\varepsilon}$   
 келип чыгып,  $N_\varepsilon$  деп  $\frac{1}{\varepsilon}$  санын бүтүн бөлүгүн алууга болорун байкайбыз.

Аны  $N_\varepsilon = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right]$  - “бүтүн бөлүгү” деп белгилейбиз. Эгерде  $\varepsilon = 0,03$  маанисин

алсак,  $N_\varepsilon = \left[ \frac{1}{0,03} \right] = \left[ \frac{100}{3} \right] = [33,33(3)] = 33$  болуп,  $x_{33}$  - мүчөсү  $x_0 = \frac{2}{3}$  санын

$\omega_\varepsilon(x_0)$  аймакчасын чек арасында, алгачкы 32 мүчөсү аймакчанын

сыртында, ал эми калган  $x_{34}, x_{35}, \dots$  сыяктуу чексиз көп мүчөлөрү

аймакчанын ичинде жайгашып,  $x_0 = \frac{2}{3}$  санынын пределдик чекит

болорун далилдейт.

б) Алгебралык ыкма:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left( 2 - \frac{3}{n} \right)}{3 \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{n}}{3} = \frac{2 - \frac{3}{\infty}}{3} = \frac{2 - 0}{3} = \frac{2}{3}.$$

Удаалаштыктын мүчөлөрү  $x_0 = \frac{2}{3}$  пределдик чекитине сол жактан

жакындап келип,  $\forall n \in N : -\frac{1}{3} \leq x_n \leq \frac{2}{3}$  аралыгында чектелген болот.  $\triangleleft$

2.  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  удаалаштыгын жыйналуучулугун изилдегиле.

**Изилдөө:**  $\triangleright$  Удаалаштыктын бир канча мүчөлөрүн жазуудан кийин  
 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots$ , жуп орундагы мүчөлөрү өсүп, так  
 орундагы мүчөлөрү кемип барарын байкайбыз. Жалпы учурда аны  
 монотондуу өсүүчү же кемүүчү удаалаштык деп айта албайбыз. Бирок,

$|a_n| = \frac{1}{n}$  абсолюттук чоңдуктарын карасак,  $\{|a_n|\}$  удаалаштыгы

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  монотондуу кемүүчү болот.  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

удаалаштыгы  $x_0 = 0$  чектүү пределине ээ болуп, ага жуп мүчөлөрү сол жагынан, так мүчөлөрү оң жагынан жакындап келет (1.1.8 -чийме).



1.1.8 -чийме

3.  $b_n = n^2 - 6n + 5$  удаалаштыгын изилдегиле.

**Изилдөө:**  $\triangleright$  Удаалаштыктын мүчөлөрүн жазып, эркин алынган  $\varepsilon > 0$  санына жараш

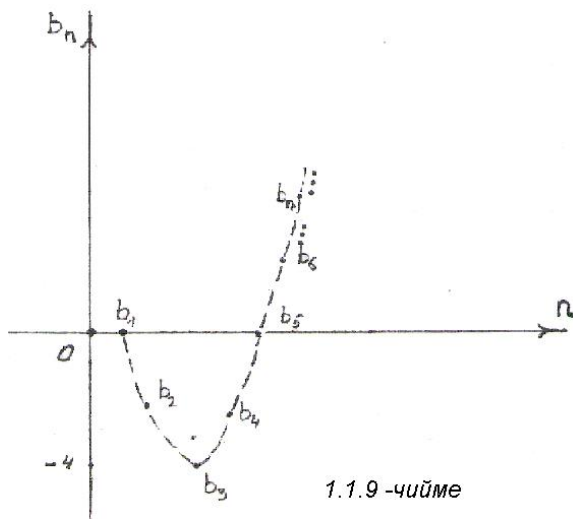
$$\rho(a_n, 0) = |a_n - 0| = |a_n| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

шартын канааттандыруучу  $n$  номерлерин эң кичинеси болгон

$$N_\varepsilon = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] \text{ номери ар дайым}$$

табылгандыктан,  $x_0 = 0$  пределдик чекит болот. Удаалаштык чектелген,

$$\text{б.а. } \forall n \in \mathbb{N}: -\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1.$$



1.1.9 -чийме

анын  $0, -3, -4, -3, 0, 5, \dots, n^2 - 6n + 5, \dots$

мүчөлөрүн монотондуу өсүүсү же кемүүсү жөнүндө сөз кыла албайбыз. Бирок, анын графигин тургузуп,  $n \geq 3$  болгондон баштап монотондуу өсүүчү болуп, төмөн жагынан “- 4” чекити менен чектелген, жогору жагынан чектелбеген удаалаштык болорун көрөбүз (1.1.9 -чийме).

Демек,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 6n + 5) = +\infty$ .

4.  $y_n = \sin \frac{\pi}{2} n$  удаалаштыгын изилдегиле.

**Изилдөө:**  $\triangleright$  Удаалаштыктын бир канча мүчөлөрүн жазып көрүп

1, 0, -1, 0, 1, ...,  $\sin \frac{\pi}{2}n, \dots$ , анын мүчөлөрү бири – биринен обочо жайгашып, жакындашпаганын байкайбыз.

Эркин алынган  $\varepsilon > 0$  саны бирден чоң тандалса, анда пределдик чекит деп болжолдонгон  $x_0$  чекитин  $\varepsilon$ - аймакчасында экиден ашык удаалаштыктын мүчөлөрү жайгашпайт. Демек, ал  $\forall n \in N: -1 \leq x_n \leq 1$  аралыгында чектелген удаалаштык болгонуна карабастан, таралуучу удаалаштык болот. Бирок, Больцано – Кошинин леммасына ылайык анын мүчөлөрүнөн терип алып,

$$\begin{aligned} 1, 1, 1, \dots, 1, \dots &\rightarrow 1, \\ 0, 0, 0, \dots, 0, \dots &\rightarrow 0, \\ -1, -1, -1, \dots, -1, \dots &\rightarrow -1 \end{aligned}$$

жыйналуучу курама удаалаштыктарын түзүүгө болот. Бул учурда берилген удаалаштыктын предели жашабаганы менен жогорку жана төмөнкү пределдери жашайт:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{\pi}{2}n \right) = -1 \quad - \text{ төмөнкү предели, } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{\pi}{2}n \right) = 1 \quad - \text{ жогорку предели.}$$

◁

5.  $z_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2}n$  пределин тапкыла.

**Чыгаруу:** Бул удаалаштыкты  $x_n = \frac{1}{n}$  удаалаштыгы менен салыштырып,  $|z_n| = \left| \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{\pi}{2}n \right| = \left| \frac{1}{n} \right| \cdot \left| \sin \frac{\pi}{2}n \right| \leq \left| \frac{1}{n} \right| = 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} = x_n$  ээ болобуз.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  болгондуктан, андан кичине удаалаштык  $0 \leq |z_n| \leq |x_n|$  шартына баш ийгендиктен салыштыруу эрежесине таянып,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2}n \right) = 0$  деп түшүнөбүз. Бул учурда удаалаштыктын айрым мүчөлөрү пределдик  $x_0 = 0$  чекитине сол жактан, ал эми айрымдары оң жактан жакындап барат. ◁

6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \cos n}{n}$  пределин тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Кошумча чексиз кичине  $\alpha_n = \frac{\cos n}{n} \rightarrow 0$  удаалаштыгын алып, берилген удаалаштыкты  $y_n = \frac{n + \cos n}{n} = 1 + \frac{\cos n}{n} = 1 + \alpha_n$  көрүнүшүнө келтирели. (Мында  $|\alpha_n| = \left| \frac{\cos n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$  жана  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  болгондуктан,  $\alpha_n$  чексиз кичине чоңдук болот.)

Удаалаштыктын предели  $x_0 = 1$  саны, анын мүчөлөрүнөн кайсы бир  $N_\varepsilon$  номерден баштап чексиз кичинеге гана айырмаланып калгандыктан,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \cos n}{n} = 1$  болот.  $\triangleleft$

7. Пределин тапкыла  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n^2 + 2n + 1)}{1 - n - n^2}$ .

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Алгебралык усулду колдонуп, предел алдындагы бөлчөктүн алымы менен бөлүмүн  $n$  дин эң чоң даражасына бөлүп

жиберсек  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n^2 + 2n + 1)}{1 - n - n^2} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2}}{\frac{1 - n - n^2}{n^2}} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} - 1} = 5 \cdot \frac{1}{(-1)} = -5$

келип чыгат.  $\triangleleft$

8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n^n}$  пределин аныктагыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген удаалаштыктын  $n \geq 15$  болгон номерлер менен белгиленген бардык мүчөлөрү үчүн  $\frac{5}{n} \leq \frac{1}{3}$  барабарсыздыгы аткарылгандыктан, жалпы 15 тен чоң  $n$  дер үчүн

$$0 < \left(\frac{5}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ аткарылат.}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{\infty} = 0$ , андай болсо удаалаштыктарды

салыштыруу эрежеси боюнча

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n}\right)^n = 0 \text{ келип чыгат. } \triangleleft$$

$$9. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } |q| < 1, \\ \infty, & \text{эгерде } |q| > 1 \end{cases} \text{ болорун далилдегиле.}$$

**Далилдөө.** ▷ Башында Бернуллинин барабарсыздыгы деп аталган  $(1 + \alpha)^n \geq 1 + \alpha \cdot n$ ,  $\alpha \in R$  жана  $\alpha > -1$ ,  $n \in N$  (2) барабарсыздыгын тууралыгын математикалык индукция усулу менен көрсөтөлү.

1.  $n = 1$  болсо барабарсыздык

$$(1 + \alpha)^1 \geq 1 + \alpha \text{ же } 1 + \alpha \geq 1 + \alpha \text{ туура болот.}$$

2.  $n = k$  болсо (2) аткарылсын деп болжолдойлу

$$(1 + \alpha)^k \geq 1 + k\alpha. \quad (3)$$

3. (3) барабарсыздыгын эки жагын тең  $1 + \alpha$  оң санына көбөйтөлү ( $\alpha > -1$ ), анда

$$(1 + \alpha)^{k+1} \geq (1 + k\alpha) \cdot (1 + \alpha) = 1 + k + k\alpha + k\alpha^2 = 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2 \geq 1 + (k+1)\alpha$$

келип чыгат, себеби  $k\alpha^2$  оң сан жана аны таштап жиберсек сумма кичирейет. Демек,  $n = k + 1$  болгон учурда (2) туура болуп, Бернуллинин барабарсыздыгы математикалык индукция методуна ылайык бардык  $n \in N$  сандары үчүн аткарылат деп жыйынтыкталат.

Эми эки учурга токтолойлу:

**а)**  $|q| > 1$  болсун, аны  $|q| = 1 + h$  ( $h > 0$ ) саны сыяктуу жазып алып, (2) нин негизинде

$$|q|^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh \text{ деп эсептейли. Анда } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + nh) = \infty$$

болгондуктан, андан чоң удаалаштык катары  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = \infty$  да чексиз чоң чоңдук болот.

**б)**  $|q| < 1$  болсун. Эгерде  $q = 0$  болсо, анда  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$  болору талашсыз, ал эми  $q \neq 0$  болсо  $\left| \frac{1}{q} \right| > 1$  аткарылып, жогорку учурда

айтылгандай  $\left\{ \frac{1}{q^n} \right\}$  удаалаштыгы чексиз чоң чоңдук болот. Ал эми  $\{q^n\}$

удаалаштыгы ага тескери удаалаштык катары чексиз кичине болуп,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  келип чыгат. ◁



10. Пределдин тапкыла.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ .

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Адегенде кашаанын ичин  $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  көрүнүшкө өзгөртүп жазалы. Анда кошулуучулар жоюшуп, биринчи жана акыркы кошулуучулар гана калаарын байкайбыз.

Демек  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1. \triangleleft$

## 1. Көнүгүүлөр

1.1 Бардык 5 ке бөлүнүүчү натуралдык сандардын көптүгүн кубатын тапкыла (Жообу: санаттык  $a$  кубатына ээ)

1.2. Бирден баштап 1000ге чейинки натуралдык сандардын көптүгүн кубатын тапкыла (Жообу: 1000).

1.3. -100 дөн баштап 15 санына чейинки аягы “0” цифрасы менен бүткөн бүтүн сандардын көптүгүн кубатын тапкыла (Жообу: 12).

1.4. Бардык так бүтүн сандар менен жуп бүтүн сандардын көптүктөрү эквиваленттүү болуп, кубаттары  $Z$  көптүгүн кубатына тең экендигин далилдегиле.

1.5. Ондук системада аткарылган төмөндөгү амалдарды: а) жетилик системада, б) экилик системада жазгыла:

- |                    |               |                         |
|--------------------|---------------|-------------------------|
| 1) $3+3=6,$        | 4) $12:6=2,$  | 7) $2 \cdot 1 - 4:2=0,$ |
| 2) $9-7=2,$        | 5) $6+6=12,$  | 8) $3+2 \cdot 3-5=4,$   |
| 3) $4 \cdot 6=24,$ | 6) $5+2-4=3,$ | 9) $6:3-1=1.$           |

1.6. Математикалык индукция усулу менен бардык  $n \in N$  сандары үчүн төмөндөгү бүтүмдөрдүн тууралыгын далилдегиле:

а)  $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2};$

б)  $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$

в)  $1+2^1+2^2+\dots+2^{n-1} = 2^n - 1;$

г)  $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}.$

1.7. Абсолюттук чоңдуктардын төмөндөгү касиеттерин далилдегиле:

$$\text{a) } |a+b| \leq |a|+|b|, \quad \text{г) } |x \cdot y \cdot z| = |x| \cdot |y| \cdot |z|,$$

$$\text{б) } |a-b| \geq |a|-|b|, \quad \text{д) } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0;$$

$$\text{в) } -|a| \leq a \leq |a|,$$

$$\text{е) } |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, |x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \cup x \leq -a.$$

1.8. Төмөндөгү барабарсыздыктарды жана теңдемелерди чыгаргыла.

$$\text{а) } |x+1| < 0,01 \quad (\text{ж.о.о.б.у.}: -1,01 < x < -0,99).$$

$$\text{б) } |x-2| \geq 10, \quad (\text{ж.о.о.б.у.}: x \leq -8 \text{ же } x \geq 12).$$

$$\text{в) } |x| > 1x+1, \quad (\text{ж.о.о.б.у.}: x < -\frac{1}{2}).$$

$$\text{г) } |x+2| + |x-2| \leq 12, \quad (\text{ж.о.о.б.у.}: |x| \leq 6).$$

$$\text{д) } \left| \frac{x}{x+1} \right| \leq 1, \quad \left( \text{ж.о.о.б.у.}: x \geq -\frac{1}{2} \right).$$

$$\text{е) } |2x+3| = x^2, \quad (\text{ж.о.о.б.у.}: x_1 = -1, \quad x_2 = 3).$$

$$\text{ж) } |\sin x| = \sin x + 2, \quad \left( \text{ж.о.о.б.у.}: x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in Z \right).$$

$$\text{з) } \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \frac{x-1}{x+1}, \quad (\text{ж.о.о.б.у.}: |x| > 1 \text{ жана } x = 1).$$

1.9. Төмөндөгү сандардын  $R$  көптүгүнө пределдик чекит болорун: а) оң жагынан; б) сол жагынан; в) эки жагынан тең жакындоочу удаалаштыктарды түзүү менен далилдегиле.

$$\frac{2}{3}; \quad 7; \quad -\frac{1}{4}; \quad \sqrt{7}; \quad 145.$$

1.10. Ньютондун биному боюнча эсептегиле.

$$\text{а) } (x+7)^8; \quad \text{б) } (a+b)^5; \quad \text{в) } (1-q)^n.$$

1.11. Төмөндөгү пределдерди эсептегиле.

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n}{n^2 + 1}, \quad (\text{ж.о.о.б.у.}: 0)$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}, \quad \left( \text{ж.о.о.б.у.}: \frac{1}{2} \right).$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad (\text{ж.о.о.б.у.}: 0)$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}, \quad (\text{ж.о.о.б.у.}: 3).$$

д)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!) }{n+1}$ , (жаообу: 0)

е)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$ , (жаообу: 4)

ж)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ , (жаообу:  $\frac{1}{2}$ ).

з)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$ , (жаообу:  $\frac{4}{3}$ ).

1.12. а)  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  интервалы менен  $R = (-\infty, +\infty)$  сан огундагы

чекиттердин көптүгүнүн кубаттары бирдей экендигин далилдегиле.

б)  $[-1, 5]$  аралыгы менен  $[-7; 23]$  аралыгында жайгашкан чекиттердин көптүгүн кубатын тапкыла.

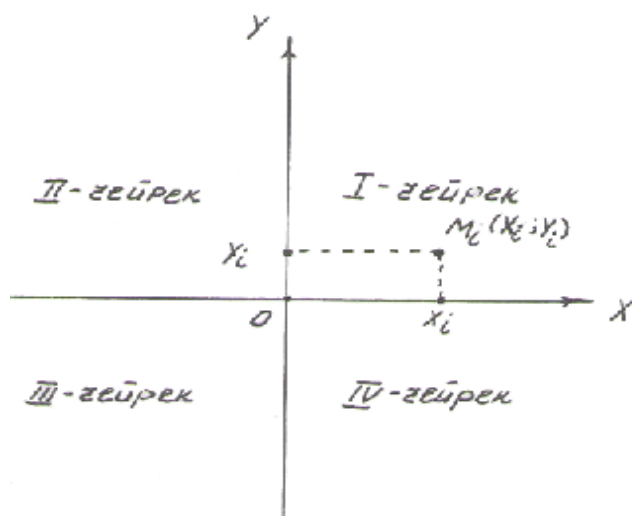
в)  $[a; b] \sim R$  болорун далилдегиле.

Көрсөтмө: Бул аралыктарды өз ара бир маанилүү тиешелеш коюучу функцияларды табуу керек.

## § 1.2 Көп өлчөмдүү мейкиндиктердин сандык моделдерин түзүү

### 1.2.1 Эки өлчөмдүү $R^2$ мейкиндиги

Ааламдын түз сызык бойлой жайгашкан бөлүкчөлөрүн сан



	I	II	III	IV
X	+	-	-	+
Y	+	+	-	-

1.2.1-чийме

огундагы чекиттер деп ойлоп, чекиттерге чыныгы сандарды тиешелеш

коюу менен, ааламдын сызыктуу бөлүгүн сандык модели болгон бир өлчөмүү  $R^1$  мейкиндигин түзүүгө болот.

Тегиздиктин бетинде жайгашкан бардык чекиттердин көптүгүн түгөй сандар менен белгилеп, аны эки өлчөмдүү мейкиндик деп  $R^2$  көрүнүштө белгилейбиз. Тегиздиктин бетинде жайгашкан чекиттерди бири – биринен айырмалап салыштыруу үчүн, тегиздикте аралыкты ченөө түшүнүгүн киргизебиз. Ал үчүн өз ара перпендикуляр эки  $Ox$  жана  $Oy$  сан окторунун жардамы менен түзүлгөн Декарттык координаталар системасы деп аталган аппаратты пайдаланабыз (1.2.1-чийме).  $O$  - чекити координата башталмасы,  $Ox$  - абсцисса огу,  $Oy$  - ордината огу,  $Oxy$  - координаттык тегиздик деп аталышат. Тегиздикте жайгашкан каалагандай  $M_i$  чекитинен координаттык окторго перпендикуляр түшүрүп, аны абсциссасы  $x_i$ , ординатасы  $y_i$  болгон чекит деп,  $M_i(x_i; y_i)$  көрүнүштө даректештирип жазабыз.  $x_i, y_i$  сандары кадимки эле чыныгы сандар болушуп,  $M_i$  чекитин координаталары деп аталышат.  $Ox$  жана  $Oy$  координаттык окторунда континуум кубатындагы чекиттер (сандар) болуп, тегиздиктин бардык чекиттерин белгилөөгө кудурети жетет, же координаттык тегиздиктеги бардык чекиттер менен эки түгөй сандардын арасында өз ара бир маанилүү тиешелештик орнотулат. Тегиздикте эркин кыймылда болгон  $M$  чекитин тик бурчтуу декарттык координаталарын өзгөрүлмө эки түгөй  $(x; y)$  чыныгы сандары менен көрсөтөбүз. Тегиздиктин бетинде жайгашкан өзгөрүлмө  $M$  чекиттери координаталары менен  $M(x; y)$  көрүнүштө жазылып, төмөндө киргизилүүчү аралык эрежесине карата эки өлчөмдүү  $R^2$  метрикалык мейкиндигин түзөт. Тегиздиктеги чекиттердин координаталары  $x, y$  чыныгы сандар болушкандыктан, тегиздиктеги чекиттердин көптүгү да континуум кубатына ээ жана тыгыз, үзгүлтүксүз (жылчыксыз) жайгашат деп эсептейбиз. Жаратылышта тегиздиктин бетин бойлоп жүрүп жаткандай элестетилген кубулуштарды үйрөнүү үчүн, жалпы учурда тегиздикте кыймылдуу деп эсептелген эки  $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$  чекиттерин арасындагы аралыкты ченөө эрежесин же метриканы киргизебиз.

**1.2.1 Аныктама.** Тегиздикте жайгашкан  $M_1(x_1; y_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2)$  чекиттерин арасындагы аралык чени деп  $\rho(M_1, M_2)$  (метрика деп) төмөндөгүдөй

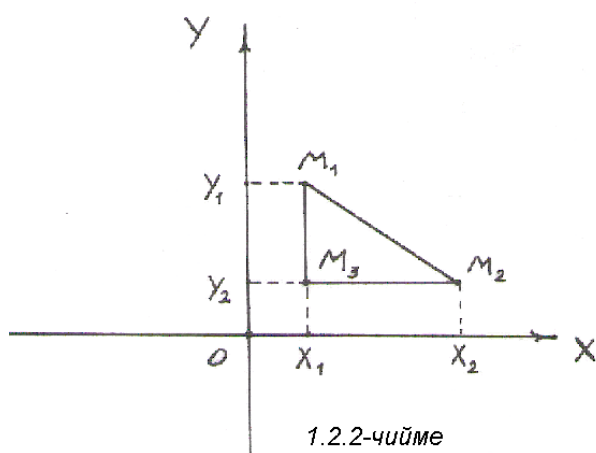
I.  $\rho(M_1, M_2) = 0$  эгерде  $M_1 = M_2$  чекиттери дал келишсе;

II.  $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$ - симметрия аксиомасы аткарылса;

III.  $\rho(M_1, M_3) \leq \rho(M_1, M_2) + \rho(M_2, M_3)$  үч бурчтук аксиомасы орун алса деген аксиомаларды канааттандырган

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (1)$$

оң санын түшүнөбүз.



▷ Аралыкты ченөөчү (1) метрика аппараты I – аксиоманы канааттандырат, анткени (1) дин

сол жагы  $x_1 = x_2, y_1 = y_2$  же

$M_1 = M_2$  шарты аткарылса гана нөлгө барабар болот.

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2,$$

$$(y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2$$

болгондуктан, II – симметрия аксиомасы да орун алат. Аралыкты ченөөнүн (1) эрежеси кадимки эле Пифагордун теоремасына окшоп кетет, чынында эле  $\Delta M_3M_1M_2$  тик бурчтуу үч бурчтугунун тик чокусун  $M_3(x_2; y_1)$  чекити десек (1.2.2 – чийме) :

$\Delta M_3M_1M_2$  тик бурчтуу үч бурчтугунда  $\rho(M_1, M_2) = |M_1M_2|$  -аралыгы гипетенузанын узундугу, ал эми катеттердин узундуктары

$$|M_3M_2| = x_2 - x_1, \quad |M_3M_1| = y_1 - y_2 \quad \text{болушуп, (1) формуласы}$$

гипетенузанын узундугун квадраты, катеттердин узундуктарын квадраттарын суммасына барабар экендигин ырастайт. “Үч бурчтуктун бир жагынын узундугу калган эки жактарынын узундуктарын суммасынан ашып кетпейт” – деген эреже үч бурчтук аксиомасынын тууралыгын көрсөтөрүн байкоого болот. Ошентип  $R^2$  тегиздиги (1) метрикага же ченөө эрежесине карата метрикалык же ченелүүчү мейкиндик болот. ◁

Тегиздикте жайгашкан чекиттердин арасындагы аралыкты (1) эрежесинен башка ченөө эрежелери менен аныктап,  $R^2$

мейкиндигиндеги предметтерди үйрөнүү үчүн чекиттерди салыштыруу, тартиптештирүү аракеттерин жасоого болот. Демек, ченөөнүн же метрикаларды киргизүүнүн көптөгөн эрежелери бар, алардын туура ченөө эрежелери экендигин жогорудагы үч аксиоманы канааттандыраарын текшерип көрүп билебиз.

$$\text{Мисалы: } 1. \rho(M_1, M_2) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} \quad (2)$$

эрежеси боюнча  $M_1$  жана  $M_2$  чекиттерин аралыгын аныктоо, аралык аксиомаларын шарттарын канааттандырат.

▷ Чынында эле  $\rho(M_1, M_2) = 0$  болсо, анда

$$\max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} = 0 \quad \text{же} \quad \begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ y_2 - y_1 = 0 \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_2 = y_1 \end{cases} \quad \text{же} \quad M_1 = M_2$$

болот. Ошондой эле  $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$  симметрия аксиомасы да аткарылат, анткени  $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$ ,  $|y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$  болору белгилүү.

Мындан сырткары  $M_3(x_3; y_3)$  чекитин алсак:

$$\rho(M_1, M_3) = \max\{|x_3 - x_1|, |y_3 - y_1|\} \quad \text{болуп,}$$

$$|x_3 - x_1| \leq |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1|,$$

$$|y_3 - y_1| \leq |y_3 - y_2| + |y_2 - y_1| \quad \text{барабарсыздыктарынан}$$

$$\rho(M_1, M_3) \leq \rho(M_3, M_2) + \rho(M_1, M_2) \quad \text{үч бурчтук аксиомасын}$$

тууралыгы келип чыгат. ◁

2.  $R^2$  тегиздигинде эки  $M_1, M_2$  чекиттерин арасындагы аралык деп  $\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \quad (3)$

санын алууга болот.

Аралыкты аныктоонун мырдай эрежеси да метриканын же аралыктын аксиомаларын толук канааттандырат. Ошентип  $R^2$  тегиздигинде ченөө иштерин аткаруучу метрика эрежелерин ар кандай тандап алуу мүмкүнчүлүгү өзүбүздө болсо да, расмий метрика катарында 1.2.1. аныктамасында баяндалган (1) эрежесин кабыл алабыз. Бирок, метриканы киргизүүнүн башка эрежелери да, (1) эрежесине каршы келбегендиктен, айрым учурларда аларды аралыктарды баалоо ыкмалары катарында колдоно беребиз.  $R^2$  тегиздигиндеги чекиттердин көптүгүндө (1) аралык эрежеси менен удаалаштык жана анын пределин

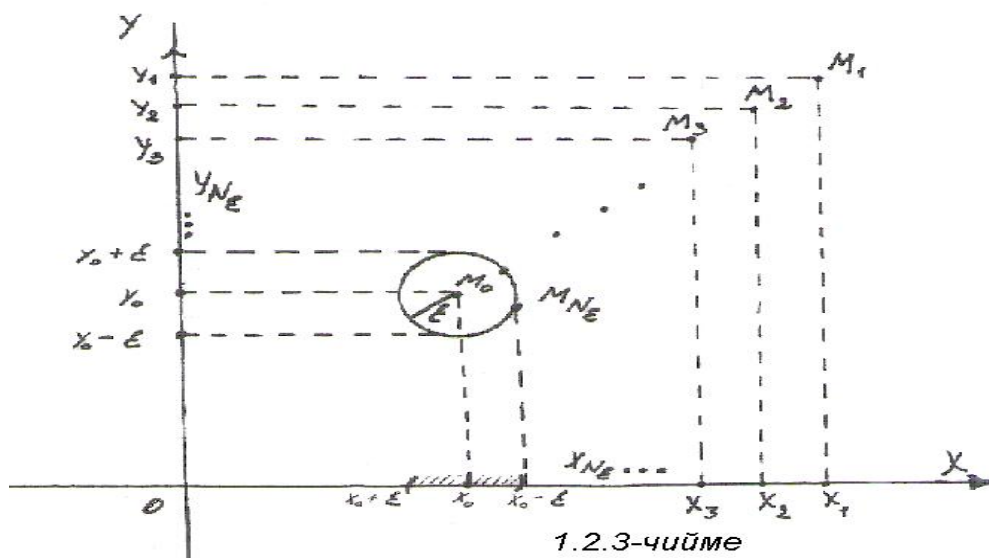
аныктоо мүмкүн болгондуктан, аны (1) эрежесине карата метрикалык мейкиндик дейбиз.

Француз философу жана математиги Р.Декарт киргизген координаталар системасы математикадагы чоң бурулуштардын бири болуп, тегиздиктеги чекиттердин кыймылына салыштырылган кубулуштарды үйрөнүүгө жол ачкан. Ошондой эле геометриялык фигуралар өзүнчө формулалар менен изилденүүчү турактуу нерселер сыяктуу гана каралбастан, жалпы алгебранын эрежелери менен эсептелүүчү кыймылдуу өзгөрүлмө чондуктар катарында изилдене баштаган.

### 1.2.2 $R^2$ мейкиндигинде пределди түшүндүрүү

$R^1$  мейкиндигинде сан огундагы ар бир чекит пределдик чекит болгондой эле,  $R^2$  мейкиндигинде координаттык тегиздиктеги ар бир чекит пределдик чекит боло алат. Аралыктарды ченөө эрежеси боюнча пределдик чекитти аныктайлы. Ал үчүн тегиздиктеги эркин кыймылдуу чекиттерди  $M(x; y)$ , ал эми кыймылсыз чекитти  $M_0(x_0; y_0)$  деп белгилеп туралы.

**1.2.2 Аныктама.** Эркин тандалган, жетишерлик кичине  $\varepsilon > 0$  саны кандай болгонуна карабастан, тегиздикте  $\rho(M_0, M) < \varepsilon$  шартын канааттандыруучу чексиз көп  $M(x; y)$  чекиттери болсо, анда  $M_0(x_0; y_0)$  - тегиздиктин пределдик чекити деп аталат. Ал эми  $M$  чекиттери  $M_0$  чекитин “ $\varepsilon$ - аймакчасында” (чеке белинде) жайгашкан деп эсептелет.



Чекиттин чеке бели (1) аралык эрежесине ылайык

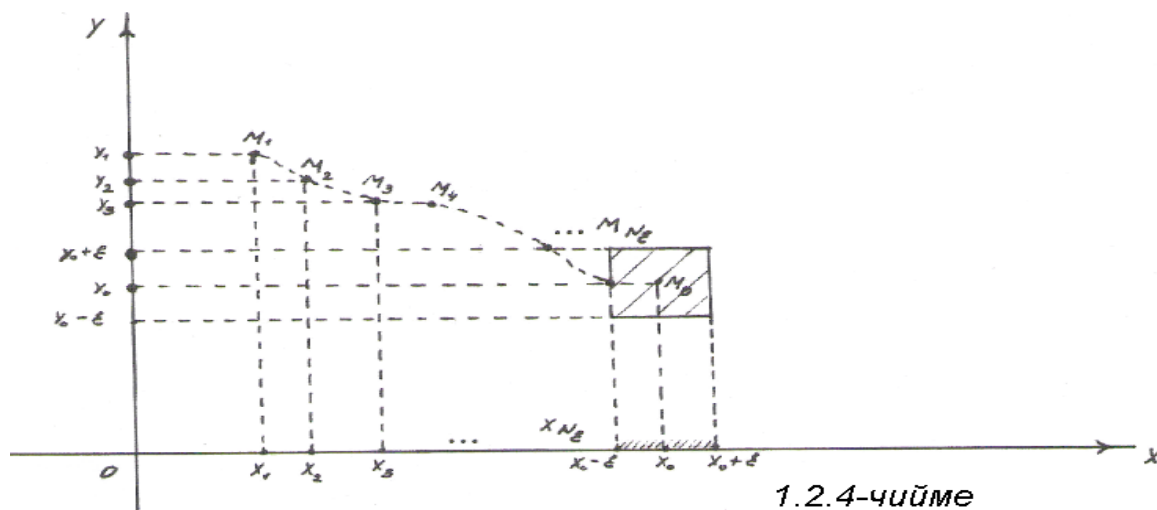
$$\rho(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \text{ же } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$$

барабарсыздыгын канаатандырган  $(x; y)$  чекиттерин көптүгү, б.а. борбору  $(x_0; y_0)$  чекити, радиусу  $\varepsilon$  болгон тегеректин ички чекиттери болушат (1.2.3-чийме). Айрым учурларда ченөө эрежеси метриканы

$|x - x_0| < \varepsilon, |y - y_0| < \varepsilon$  шарттарындагы жактары  $2\varepsilon$  болгон квадраттын

$\rho(M, M_0) = \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\}$  көрүнүштө тандап,  $\varepsilon$  - чеке белди ички чекиттери деп түшүнөбүз (1.2.4-чийме).

Пределдик чекиттин  $\varepsilon$ - аймакчасында чексиз көп чекиттердин бар экендигине санап ишенүү максатында,  $M(x; y)$  чекиттерин координаталары  $\{x_n\}, \{y_n\}$  көрүнүштөгү удаалаштыктар деп алып,



пределдик чекиттин аныктамасын удаалаштыктар тилинде төмөндөгүдөй түшүндүрүүгө болот. Айталы  $M_n$  чекиттери  $(x_n; y_n)$  координаталары менен берилсин дейли.

**1.2.3 Аныктама.** Эркибизче жетишерлик кичине деп тандалган  $\varepsilon > 0$  санына ылайык  $N_\varepsilon$  номери табылып, андан чоң болгон  $n$  номери ( $n > N_\varepsilon$ ) менен белгиленген  $M_n(x_n; y_n)$  чекиттери үчүн  $\rho(M_n, M_0) < \varepsilon$  шарты аткарылса, анда  $\{M_n\}$  чекиттерин удаалаштыгын жыйналуучу деп атап,  $M_0$  чектүү пределине ээ болот дейбиз.

$$\text{Аны } \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0 \quad (4)$$

көрүнүштө жазып,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(M_n, M_0) = 0$  деп түшүнөбүз. Бул учурда ченөө метрикасына ылайык,  $\rho(M_n, M_0) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}$  чексиз кичине



чондук болот же  $|x_n - x_0| = \alpha_n$ ,  $|y_n - y_0| = \beta_n$  чексиз кичине чондуктар болушат. Ошентип (4) түн аткарылуусунан  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ , келип чыгат деген жыйынтыкка келебиз. Демек,  $\{M_n\} = \{(x_n, y_n)\}$  удалаштыгы  $M_0(x_0, y_0)$  чекитине жыйналышы үчүн  $\{x_n\}$  удаалаштыгы  $x_0$  чекитине (санына),  $\{y_n\}$  удаалаштыгы  $y_0$  чекитине (санына) жыйналуусу керек жана тескерисинче:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0. \end{cases} \quad (5)$$

Сан оғунда пределге оң жана сол жактардан умтулуу мүмкүн болсо, координаттык тегиздикте  $M_n$  удаалаштыктары  $M_0$  чекитин  $\varepsilon$  аймакчасына тегиздиктеги каалаган багыт боюнча жакындап келе алат. Жыйналуучу удаалаштыктын чектүү сандагы алгачкы  $M_1, M_2, \dots, M_{N_\varepsilon}$  мүчөлөрү гана  $M_0$  дүн  $\varepsilon$  аймакчасын сыртында калып, калган чексиз көп  $n > N_\varepsilon$  номерлери менен белгиленген мүчөлөрү  $\varepsilon$  - аймакчасын ичинде жайгашат.

**Мисалы:**  $\{M_n\}$  чекиттери координаталары  $x_n = \frac{3n}{n+1}$ ,  $y_n = \frac{2n+1}{n}$  болгон удаалаштыкты түзүшөт ( $n \in N$ ). Бул удаалаштыкка  $M_0(3; 2)$  пределдик чекит болорун далилдегиле.

**Далилдөө.**  $\triangleright$  Эркибизче жетишерлик кичине  $\varepsilon = 0,01$  санын тандап,  $\rho(M_n, M_0) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$  шарты  $|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$  жана  $|y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$  болгондо аткарыларын байкайбыз. Чынында эле

$$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon \quad \text{болот.}$$

Эсептөөдө жеңилдик болсун үчүн  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$  санын ордуна, андан кичине  $\frac{\varepsilon}{2}$  санын алып,  $|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$  жана  $|y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$  талабын коюу менен  $\rho(M_n, M_0) < \varepsilon$  шартын аткарылуусун бузбастан, кайра күчөтө алабыз.

Демек,  $|x_n - x_0| = \left| \frac{3n}{n+1} - 3 \right| = \left| \frac{3n - 3n - 3}{n+1} \right| = \left| \frac{-3}{n+1} \right| = \frac{3}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$  же  $n+1 > \frac{6}{\varepsilon}$  же  $n > \frac{6}{\varepsilon} - 1$

болуп,  $N_\varepsilon = \frac{6}{\varepsilon} - 1 = \frac{6}{0,01} - 1 = 600 - 1 = 599$  болот.

Ал эми  $|y_n - y_0| = \left| \frac{2n+1}{n} - 2 \right| = \left| \frac{2n+1-2n}{n} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$  же  $n > \frac{2}{\varepsilon}$  болуп,

$N_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} = \frac{2}{0,01} = 200$  келип чыгат. Жалпы учурда  $N_\varepsilon$  деп 200, 599 сандарын

чоңун алабыз:  $N_\varepsilon = 599$ . Ошентип борбору  $M_0(3; 2)$ - чекити, радиусу  $\varepsilon = 0,01$  болгон тегеректин сыртында  $\{M_n\}$  удаалаштыгын чектүү 598 сандагы  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{598}$  мүчөлөрү жайгашып,  $M_{599}$  - мүчөсү  $\varepsilon$ -аймакчасын чек арасында, калган  $M_{600}, M_{601}, M_{602}, \dots$  чексиз көп мүчөлөрү  $\varepsilon$ -аймакча болгон тегеректин ичинде жайгашат. Анда аныктама боюнча  $M_0(3; 2)$  чекити берилген  $\{M_n\}$  удаалаштыгын пределдик чекити болот. Табылган  $N_\varepsilon$  номери, эркин тандалган  $\varepsilon > 0$  санына ылайыкталып, андан көз каранды болот. Эгерде  $\varepsilon = 0,05$  десек, анда

$\{x_n\}$  үчүн  $N_\varepsilon = \frac{6}{\varepsilon} - 1 = \frac{6}{0,05} - 1 = \frac{600}{5} - 1 = 119$ ,

$\{y_n\}$  үчүн  $N_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon} = \frac{2}{0,05} = \frac{200}{5} = 40$ ,

$\{M_n\}$  үчүн  $N_\varepsilon = \max\{119, 20\} = 119$  болот.

Бул учурда  $M_1, M_2, \dots, M_{118}$  мүчөлөрү борбору  $M_0$ , радиусу  $\varepsilon = 0,05$  болгон тегеректин сыртында, ал эми  $M_{119}$  - мүчө тегеректин чек арасында, калган  $n > N_\varepsilon = 119$  номерден башталган  $M_{120}, M_{121}, M_{122}, \dots$  чексиз көп мүчөлөрү тегеректин ичинде жайгашышат.

$\varepsilon$  - аймакчасын сыртында канча  $M_n$  мүчөлөрү жайгашканын ырастоочу  $N_\varepsilon$  номерин табылуусу,  $M_0$  чекитин  $\varepsilon$  - аймакчасында чексиз көп  $M_n$  мүчөлөрү жайланышканын же  $M_0$  пределдик чекит экенин далилдейт.  $\triangleleft$

**1.2.4 Аныктама.** Эгерде  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$  шарты аткарылса, анда  $\{M_n\}$  чексиз кичине чоңдук, ал эми  $\lim_{n \rightarrow \infty} |M_n| = +\infty$  болсо,  $\{M_n\}$  чексиз чоң чоңдук деп аталышат.

Ошентип  $\{M_n\}$  удаалаштыгы координата башталмасы болгон  $O(0;0)$  чекитине умтулса, чексиз кичине чоңдук болуп,  $O$  чекитине

тегиздиктин каалаган тарабынан жакындайт. Демек,  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \end{cases}$  болсо,

же  $x_n, y_n$  чексиз кичине чоңдуктар болушса, анда  $M_n$  да чексиз кичине чоңдук болот.

Сан огунда чексиз чоң чоңдуктар эки багыттын (оң, терс) бүтөөр жеринде гана болсо, ал эми тегиздиктеги чексиз чоң чоңдуктар чексиз алыстатылган чекиттер деп аталып, координаттык тегиздиктин бардык багыттар боюнча бүтөөр кыйырында жайгашат деп эсептейбиз:

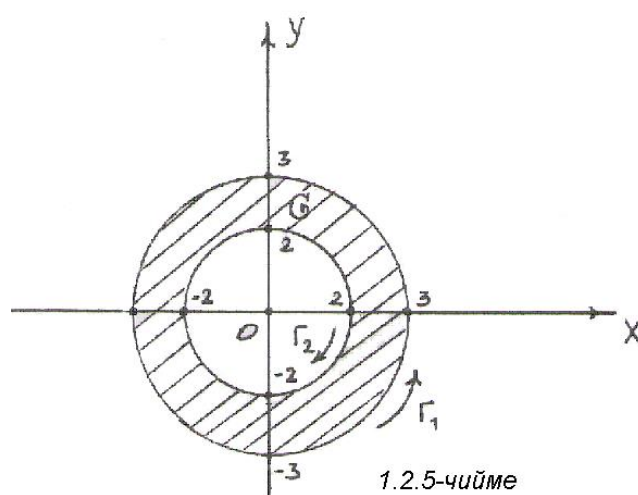
$$\lim_{n \rightarrow \infty} |M_n| = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = +\infty. \end{cases} \text{ Координаталардын бирөөсү чектелбесе}$$

эле,  $\{M_n\}$  чексиз чоң чоңдук болот. Эгерде пределдик  $M_0$  чекити чексиз алыстатылган чекит болуп калса же аныктоого мүмкүн болбосо, анда  $\{M_n\}$  удаалаштыгы таралуучу удаалаштык болот.

Сан огундагы кесиндилерде жайгашкан чекиттердин көптүктөрү сегмент, интервал ж.б. деп аталса, координаттык тегиздиктин бөлүктөрү областтар деп аталышат.

Тегиздиктин кайсы бир бөлүгүндө  $G$  областы берилсин деп эсептейли.

**1.2.5 Аныктама.** Эгерде  $A$  чекитин ( $A \in G$ ) чексиз кичине  $\varepsilon$ -чеке



белинде  $G$  областын чекиттеринен башка чекиттер жайгашпаса, анда  $A$  чекити  $G$  областын ички чекити деп аталат. Ал эми  $A$  чекитин чексиз кичине  $\varepsilon$ -чеке белинде,  $G$  областынан башка областтардын да жок дегенде бир же андан көп чекиттери да жайгашып калса, анда аны чек

ара чекити деп айтабыз.

Айрым областтар чек ара чекиттерин өздөрүндө кармап тура алышпайт.

**Мисалы:**

$$G = \{(x; y) : 4 < x^2 + y^2 \leq 9, x \in R \wedge y \in R\}$$

областы борбору  $O(0; 0)$  чекити, радиусу  $r = 3$  болгон тегеректин ички, ал эми борбору  $O(0; 0)$ , радиусу  $r = 2$  тегеректин сырткы чекиттери жайгашкан координаттык тегиздиктин бөлүгү болот (1.2.5 -чийме).

Шакек сыяктуу  $G$  областы ички тараптан чек ара чекиттерин кармап тура албайт. Анткени  $x^2 + y^2 = 4$  айланасында жайгашкан чекиттер  $G$  областына таандык эмес. Бул айланада жайгашкан чекиттерге, тегиздикте эки тараптан тең чекиттер тыгыз жандашкандыктан, аларга коңшулаш чекиттерди көрсөтө албайбыз. Ошондуктан  $G$  областын чекиттери менен айтылган айлананын чекиттерин арасында чексиз көп чекиттер бар деп элестетебиз. Бул учурда  $G$  областынан  $x^2 + y^2 = 4$  чек арасына чексиз жакындап барган каалаган чекиттердин  $\varepsilon$  - чеке белинде,  $G$  областын чекиттеринен башка бир да чекит болбогондой кылып  $\varepsilon > 0$  санын тандоого болот же алар ички чекиттер гана боло алышат. Бирок,  $x^2 + y^2 = 4$  айланасында жайгашкан чекиттер  $G$  областына таандык болбогону менен анын чек ара чекиттери болот, анткени ал чекиттердин ар биринин  $\varepsilon$  - чеке белинде  $G$  областын чекиттери кездешет.

$G$  областын сырткы тарабында жалаң гана ага таандык чек ара чекиттери жайгашат, анткени  $x^2 + y^2 = 9$  айланасын чекиттери  $G$  областына таандык жана областтын эң акыркы чекиттери болушат.  $\varepsilon > 0$  санын кандай тандасак да акыркы чекиттердин  $\varepsilon > 0$  - чеке белинде  $G$  областына таандык болбогон чекиттер да жайгашып,  $x^2 + y^2 = 9$  айланасындагы бардык чекиттер чек ара чекиттери болушат.

**1.2.6 Аныктама.**  $G$  областын бардык чекиттери жалаң гана ички чекиттер болушуп, бир да чек ара чекитине ээ болбосо, анда ал ачык область деп аталат. Ал эми  $G$  областын чек ара чекиттерин бардыгы  $G$  областын өзүндө кармалып турса, аны туюк (жабык) область дейбиз.

Сан огунда интервалдар - ачык аралык (көптүк), сегменттер - туюк же жабык аралык (көптүк) болушуп, координаттык тегиздиктеги ачык, жабык областтар алардын аналогдору болушат. Каралган мисалдагы шакек сыяктуу  $G$  областы ички тараптан ачык, сырткы тараптан туюк (жабык) болуп, шакекченин сырткы тарабындагы областтар үчүн өзүнүн

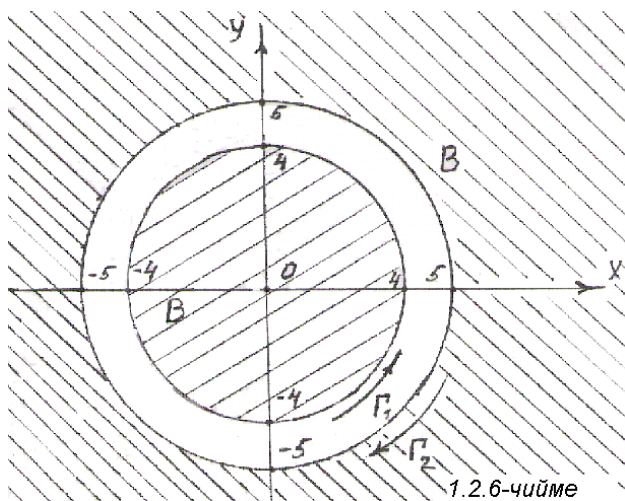
бардык чек ара чекиттерин кармап турган жабык область, ал эми шакеченин ички тарабындагы областтар үчүн бардык чекиттери ички чекиттер болгон ачык область катары эсептелет.

**1.2.7 Аныктама.**  $G$  областын каалагандай эки чекитинен бири-бирине  $G$  областына таандык болгон чекиттер аркылуу жол жүрүп жетүүгө мүмкүн болсо, анда  $G$  областын бир байламталуу область, эгерде мындай мүмкүнчүлүк болбосо көп байламталуу область деп айтабыз.

**Мисалы:**  $A = \{(x; y) : 4 < x^2 + y^2 \leq 9, \quad x \in R, \quad y \in R\}$  областы (1.2.5 -чийме) бир байламталуу область,

$$B = \left\{ (x; y) : x^2 + y^2 \leq 16 \wedge x^2 + y^2 \geq 25. \quad x, y \in R \right\}$$

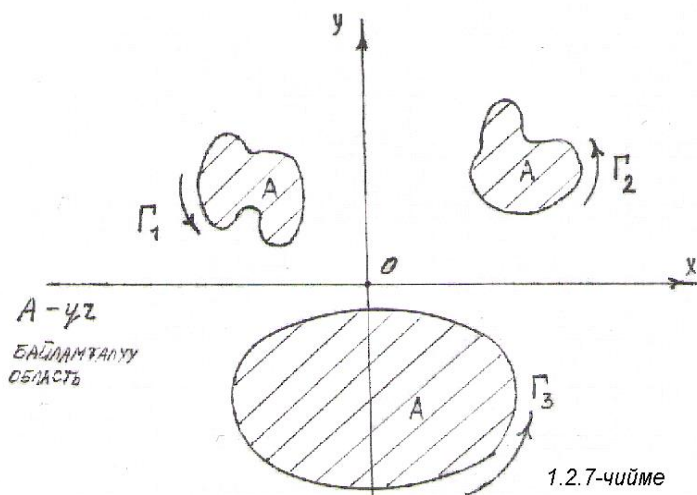
эки байламталуу область болушат (1.2.6 - чийме). 1.2.7- чиймеде үч байламталуу область көрсөтүлгөн.



Областтар чектелген жана чектелбеген болуп экиге бөлүнүшөт. Жогоруда көрсөтүлгөн 1.2.5, 1.2.7 – чиймелерде чектелген областтар, 1.2.6 – чиймеде чектелбеген область берилген. Чектелген областын  $(x; y)$  координаталуу чекиттеринде  $x, y$  чыныгы сандары чектүү

аралыкта өзгөрө алат, б.а. чектелген областты сыртынан чектөөчү жок дегенде бир тегерек менен курчай алабыз. Чектелбеген областта  $x, y$  координаталарын бири чексиз аралыкка чейин өзгөрө алат. Чектелбеген область ачык деп эсептелет. Координаттык тегиздикте жайгашкан областтарды чектеп курчап туруучу ийри сызыктардын багыттары да мааниге ээ, алар оң, терс багыттарга бөлүнүшөт.

**1.2.8 Аныктама.**  $G$  областы туюк  $\Gamma$  ийриси менен чектелген дейли.  $\Gamma$  ийрисин бойлой саат жебесине каршы багытта жол жүргөн кезде  $G$  областы сол жакта кала тургандай багыт - оң багыт деп кабыл алынат, ал эми ага каршы багыт - терс багыт деп эсептелет.

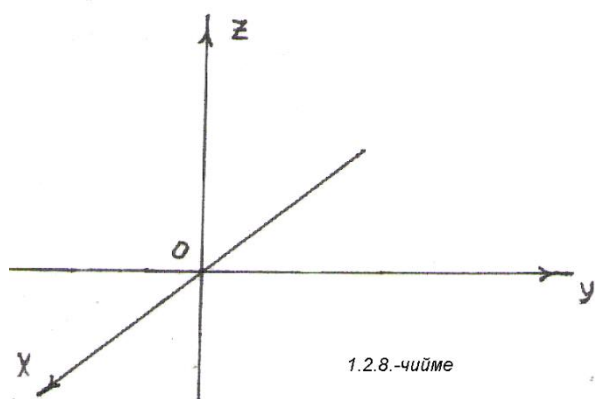


1.2.5 – 1.2.7 – чиймелерде оң багыттар стрелка менен көрсөтүлгөн.

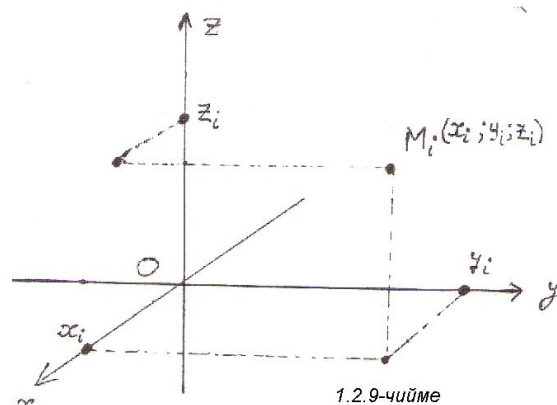
Ошентип  $R^2$  мейкиндигинде сандарды жайгаштыруу тартиби тегиздиктеги декарттык координаталар системасы аркылуу ишке ашырылып, координата башталмасы

болгон  $O(0;0)$  чекити чөйрөнү байкоочу жайгашкан чекит катарында элестетилет. Тегиздиктеги чекиттердин өз ара байланыштары (1) эрежеси менен аныкталган «аралыктарды ченөө» түшүнүгү аркылуу жүргүзүлүп, жаратылышта тегиздиктин бетинде болуп жаткан кубулуштарды жеринде талдап үйрөнүүгө мүмкүнчүлүк түзөт. Кубулуш жүрүп жаткан чекитке жакындоо ыкмасы предел аппараты менен ишке ашырылып, жакындоо жана алыстоо ылдамдыктары бааланат.

### 1.2.3 $R^3$ мейкиндигинде сандарды жайгаштыруу



Аалам чөйрөсүндө биздин



көзүбүзгө көрүнүп, күнүмдүк жашообузду өткөрүп жаткан бөлүгү үч өлчөмдүү  $R^3$  мейкиндиги болуп, бардык нерселер үч өлчөмү: узуну, туурасы, бийиктиги боюнча таанылып, сезимибизде кабыл алынат. Үч өлчөмдүү чөйрө мейкиндигин сандар менен моделдештирип, математиканын тилинде түшүндүрүү үчүн мейкиндиктин кайсы бир

жеринен  $O$  чекитин тандап, аны байкоочу турган чекит дейбиз.  $O$  чекитинде кесилишүүчү өз ара перпендикуляр  $Ox, Oy, Oz$  сан окторун тургузабыз (1.2.8 – чийме). Натыйжада,  $O$  чекитинде туруп алып, үч өлчөмдүү мейкиндикке байкоо жүргүзүүгө ылайыкташкан тик бурчтуу декарттык координаталар системасы деп аталган аппарат түзөбүз.  $O$  чекити координаталар башталмасы,  $Ox$  абцисса огу,  $Oy$  ордината огу,  $Oz$  аппликата огу деп айырмаланып аталып, жалпы учурда тик бурчтуу  $Oxyz$  декарттык координаталар системасында  $Ox, Oy, Oz$  координаттык октор,  $Oxy, Oyz, Oxz$  координаттык тегиздиктер деп айтылышат. Координаттык тегиздиктер мейкиндикти 8 октанттарга же бөлүктөргө бөлүп турат.

Үч өлчөмдүү мейкиндикте жайгашкан каалагандай  $M_i$  чекитин, берилген  $Oxyz$  декарттык системасына карата үч координаталары болот. Бул координаталарды табуу үчүн,  $M_i$  чекитинен  $Ox, Oy, Oz$  координаттык окторуна перпендикуляр кесүүчү тегиздиктерин жүргүзөбүз. Тегиздиктердин координаттык октор менен кесилишүү чекиттери болушкан  $x_i, y_i, z_i$  чыныгы сандары,  $M_i$  чекитинин координаталары деп аталышат (1.2.9 – чийме).  $O$  чекитин координаталары менен  $O(0; 0; 0)$ , ал эми  $M_i$  чекитин  $M_i(x_i; y_i; z_i)$  көрүнүштөрдө даректештирип жазабыз.

$Ox, Oy, Oz$  координаттык октору чыныгы сандардын мейкиндиктерин сүрөттөшкөн сызыктуу сан октору болушкандыктан, аларда континуум кубатындагы чыныгы сандар болуп, үч өлчөмдүү  $R^3$  мейкиндигинде жайгашкан бардык чекиттерге координаталар болгонго жетиштүү чыныгы сандар бар. Ошондуктан  $R^3$  мейкиндигин толтуруп турган чекиттер да тыгыз жана жылчыксыз же коңшу чекиттерди көрсөтүүгө мүмкүн эмес деңгээлде үзгүлтүксүз жайгашкан деп эсептелет. Ошентип тик бурчтуу декарттык координаталар системасы менен,  $R^3$  мейкиндигин чекиттеринде болуп жаткан кубулуштарды сандык жактан бир маанилүү мүнөздөө мүмкүнчүлүгү жаралат. Анткени  $R^3$  мейкиндигиндеги ар бир чекиттин өзүнүн гана дарегин көрсөтүүчү координаталары бар, же  $(x; y; z)$  чыныгы сандарынын үчтүгүнө,  $R^3$

мейкиндигинен бир гана  $M$  чекити бир маанилүү тиешелеш коюлат жана тескерисинче. Жалпы учурда  $R^3$  мейкиндигинде эркин кыймылдап жүрүүчү чекитти  $M(x; y; z)$  деп белгилеп,  $R^3$  тө метрика же аралык эрежесин киргизебиз.

**1.2.9 Аныктама.**  $R^3$  мейкиндигинде жайгашкан каалагандай эки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  жана  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  чекиттерин арасындагы аралыктын чени же метрика деп, метриканын үч аксиомаларын тең канааттандырган

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (6)$$

чыныгы санын түшүнөбүз.

Аралыкты ченөөнүн киргизилген (6) эрежеси метриканын I, II, III аксиомаларын канааттандыраарын  $R^2$  мейкиндигиндеги (1) эрежесин текшерген сыяктуу жүргүзүүгө болот. Ошондуктан  $R^3$  тү, (6) аралыкты ченөө эрежесине карата метрикалык (ченелүүчү) мейкиндик деп эсептейбиз.  $M_1$  жана  $M_2$  чекиттеринин арасындагы аралыкты, кырларынын узундугу  $|x_2 - x_1|$ ,  $|y_2 - y_1|$ ,  $|z_2 - z_1|$  сандары болгон параллелепипеддин диагоналынын узундугуна салыштырса болот (1.2.10-чийме). Чынында эле тик бурчтуу параллелепипеддин кырларынын квадраттарынын суммасы, анын чоң диагоналын квадратына барабар:  $|M_1 M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$  же

$$\rho(M_1, M_2) = |M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

$R^2$  мейкиндигиндей эле,  $R^3$  мейкиндигинде да аралыкты ченөө эрежесин башка ыкмалар менен тандап, чекиттердин жайгашуу жана кыймылдоо тартибин аныктоого болот.

**Мисалы: 1.**  $R^3$  мейкиндигиндеги чекиттердин көптүгү

$$\rho(M_1, M_2) = \max \{ |x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1| \} \quad (7)$$

эрежеси менен аныкталган метрикага карата мейкиндик болот.

(7) эрежесин аралыктын үч аксиомасын тең канааттандыраары, (2) эреженин метрика экенин далилдөө сыяктуу эле жүргүзүлөт. Бул учурда  $M_1$  жана  $M_2$  чекиттерин арасындагы аралык деп, алардын тиешелүү координаталарын арасындагы аралыктардын арасынан эң чоңу болгон чыныгы сан тандалат.



$$2. \rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |z_2 - z_1| \quad (8)$$

эрежесин  $R^3$  мейкиндигинде метрика катарында алууга болобу?

**Жооп:** Суроого жооп берүү үчүн аралыктарды ченөөнүн (8) эрежеси метриканын үч аксиомасын тең канааттандырыарын көрсөтөлү:

$$\triangleright I. \rho(M_1, M_2) = 0 \Leftrightarrow M_1 = M_2.$$

Чынында эле  $\rho(M_1, M_2)$  саны (8) эрежесине ылайык үч оң сандардын суммасына барабар жана ар бир кошулуучулар нөлгө барабар болсо гана нөлгө тең болот. Демек,

$$\begin{cases} |x_2 - x_1| = 0, \\ |y_2 - y_1| = 0, \\ |z_2 - z_1| = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_2 = y_1, \\ z_2 = z_1, \end{cases} \Leftrightarrow M_1 = M_2.$$

II.  $\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_1)$  аксиомасын текшерели:

Метрика деп алынган  $\rho(M_1, M_2)$  саны (8) эреже менен аныкталгандыктан, үч кошулуучуда тең

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &= |x_1 - x_2| \\ |y_2 - y_1| &= |y_1 - y_2| \\ |z_2 - z_1| &= |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

барабардыктары орун алат же II – аксиома аткарылат.

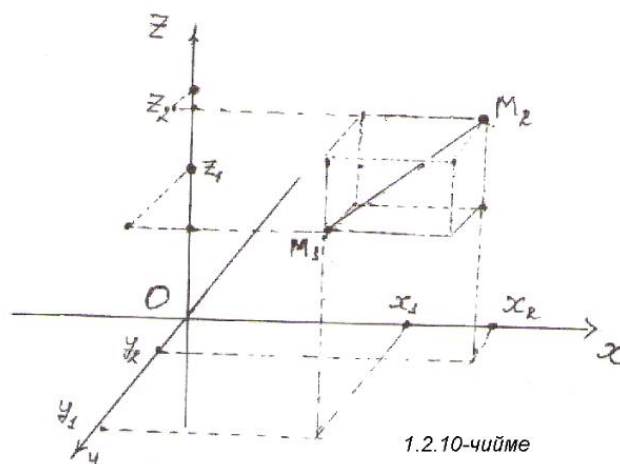
III.

$\rho(M_1, M_3) \leq \rho(M_1, M_2) + \rho(M_2, M_3)$  үч бурчтук аксиомасын текшерели.

Аны  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$  чекиттерине карата абсолюттук чоңдуктун касиетин пайдаланып көрсөтөбүз:

$$\begin{aligned} \rho(M_1, M_3) &\stackrel{(8)}{=} |x_3 - x_1| + |y_3 - y_1| + |z_3 - z_1| = |x_3 - x_2 + x_2 - x_1| + \\ &+ |y_3 - y_2 + y_2 - y_1| + |z_3 - z_2 + z_2 - z_1| \leq \\ &\leq |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1| + |y_3 - y_2| + |y_2 - y_1| + |z_3 - z_2| + |z_2 - z_1| = \rho(M_1, M_2) + \rho(M_2, M_3). \end{aligned}$$

Ошентип  $R^3$  тө жайгашкан чекиттердин көптүгү тандалган (6), (7), (8) метрика эрежелеринин баарына карата метрикалык мейкиндик болот. Анткени ушул аралыкты ченөө эрежелери менен  $R^3$  тө удаалаштык жана анын предели же пределдик чекиттер түшүнүгүн киргизүүгө болот. Бул



1.2.10-чийме

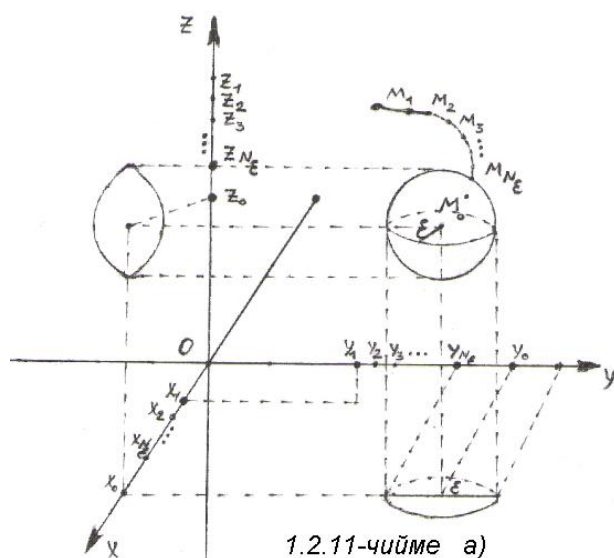
эрежелер бири – бирине каршы келбегени менен, ченөө тактыктары боюнча айырмаланышат, ошондуктан айрым жакындаштырылган аралыктарды баалоодо гана (7), (8) эрежелерди пайдаланып, негизинен  $R^3$  төгү метрика деп (6) эрежеси кабыл алынган. <

### 1.2.4 $R^3$ мейкиндигиндеги удаалаштыктардын предели

$R^3$  мейкиндигин элементтери болгон  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  чекиттерин ар бири пределдик чекит боло алат, анткени каалаган үч өлчөмдүү чекиттин чексиз кичине  $\varepsilon$ - аймакчасында чексиз көп үч өлчөмдүү чекиттер жайгашкан болот.

**1.2.10 Аныктама.** Эркин тандалуучу жетишерлик кичине деп эсептелген каалагандай  $\varepsilon > 0$  санына жараша,  $\rho(M_0, M) < \varepsilon$  шартын канааттандыруучу бардык  $M(x, y, z)$  чекиттерин көптүгү  $M_0$  чекитин  $\varepsilon$ - аймакчасы (чеке бели) деп аталат.

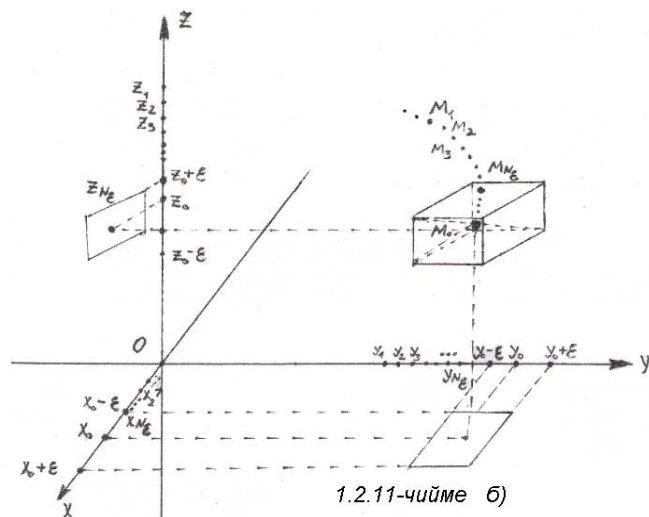
$R^1$  сан огунда  $M_0$  чекитин  $\varepsilon$ - аймакчасы деп  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  жетишерлик кичине интервал алынса,  $R^2$  координаттык тегиздигинде тандалган ченөө эрежелерине жараша борбору  $M_0$ , радиусу  $r = \varepsilon$  болгон тегеректин ички чекиттерин көптүгү же диагоналдарын кесилишинде  $M_0$  чекити турган, жактары  $2\varepsilon$  болгон квадраттын ички чекиттери эсептелет.



$R^3$  мейкиндигинде  $M_0$  чекитинин  $\varepsilon$ - аймакчасы болуп, (6) ченөө метрикасына ылайык борбору  $M_0$  чекити, радиусу  $r = \varepsilon$  болгон шардын ички чекиттери болот. Ал эми (7) ченөө эрежесине (метрикага) карата чоң диагоналдарын кесилишинде  $M_0$  чекити турган, кырларын узундугу  $2\varepsilon$  болгон кубдун ички чекиттери катарында түшүнөбүз.  $\varepsilon$ - аймакча

ачык область болуп, чек ара чекиттерин кармабайт (1.2.11-чийме).

$\varepsilon$  - аймакчанын  $Oxy$ ,  $Oyz$ ,  $Oxz$  координаттык тегиздиктердеги проекциялары тандалган метрикаларга жараша тегерекчелер же квадратчалар болушат.



**1.2.11 Аныктама.**  $R^3$  мейкиндигинде координаталары менен

$$M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3), \dots, M_n(x_n; y_n; z_n), \dots \quad (9)$$

чекиттерин удаалаштыгы берилсин дейли.

Эгерде жетишерлик кичине деп эсептелген  $\varepsilon > 0$  санын кандай тандап алганыбызга карабастан, ага ылайык  $N_\varepsilon$  номери табылып,  $n > N_\varepsilon$  номерлери менен белгиленген бардык  $M_n$  мүчөлөрү үчүн  $\rho(M_0, M_n) < \varepsilon$  шарты аткарылса, анда  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  чекити берилген (9) удаалаштыгын предели деп аталып,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M_0 \quad (10)$$

көрүнүштө жазылат. Пределик  $M_0$  чекитин координаталары чектүү сандар болсо, (9) удаалаштыгы жыйналуучу, ал эми  $M_0$  чекити чексиз алыстатылган же аныктоого мүмкүн болбогон чекит болсо, таралуучу деп аталат.

Иш жүзүндө (10) барабардыгын аткарылуусу үчүн, бир учурда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= x_0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= y_0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n &= z_0 \end{aligned} \quad (11)$$

пределдерин бардыгы аткарылышы керек. Аралыктардын тилиндеги эреже боюнча (10) пределин: (9) удаалаштыгын чектүү  $N_\varepsilon$  сандагы  $M_1, M_2, \dots, M_{N_\varepsilon-1}$  мүчөлөрү гана  $M_0$  чекитин  $\varepsilon$  - аймакчасынын сыртында калып,  $N_\varepsilon$  - мүчөсү болгон  $M_{N_\varepsilon}$  чекити чек арада жайгашып, калган

чексиз көп  $M_{N_\varepsilon+1}, M_{N_\varepsilon+2}, \dots, M_n, \dots$  мүчөлөрү  $\varepsilon$  - аймакчанын ичинде жайгашат деп түшүнөбүз.

**Мисалы:**  $\left\{ M_n \left( \frac{1}{3n}; \frac{5n}{n+1}; \frac{-n}{4n+1} \right) \right\}$  удаалаштыгын пределдик чекити (жеткен жери)  $M_0 \left( 0; 5; -\frac{1}{4} \right)$  чекити болорун далилдегиле.

**Далилдөө:**  $\triangleright x_n = \frac{1}{3n}, y_n = \frac{5n}{n+1}, z_n = \frac{-n}{4n+1}$  болгондуктан, (11)

талабы боюнча  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} = 5, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{4n+1} = -\frac{1}{4}$  ээ болуп,

$M_0 \left( 0; 5; -\frac{1}{4} \right)$  чекитин берилген удаалаштыкка пределдик чекит экендигине ишенебиз.

Ушул эле далилдөөнү аралыктарды баалоо тилинде текшерип көрөлү. Жетишерлик кичине деп ойлоп  $\varepsilon = 0,001$  санын алалы. Анда

$$\rho(M_n, M_0) = \sqrt{\left(\frac{1}{3n} - 0\right)^2 + \left(\frac{5n}{n+1} - 5\right)^2 + \left(\frac{-n}{4n+1} + \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3n}\right)^2 + \left(\frac{5}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{4n+1}\right)^2}$$

келип чыгат.  $\max_{n \in N} \left\{ \frac{1}{3n}, \frac{5}{n+1}, \frac{1}{4n+1} \right\} = \frac{5}{n+1}$  болгондуктан, адегенде

кошулуучулардын ар бирин (тамыр ичинде эмес) чоңураак  $\frac{5}{n+1}$  саны

менен алмаштырып, андан кийин  $\sqrt{3}$  санын андан чоң 2 саны менен алмаштырсак,

$$\rho(M_n, M_0) \leq \sqrt{\left(\frac{5}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{5}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{5}{n+1}\right)^2} = \sqrt{3} \cdot \frac{5}{n+1} < 2 \cdot \frac{5}{n+1} = \frac{10}{n+1} < \varepsilon \quad \text{же}$$

$n+1 > \frac{10}{\varepsilon}$  же  $n > \frac{10}{\varepsilon} - 1$  барабарсыздыгына ээ болобуз. Демек,

$N_\varepsilon = \left[ \frac{10}{\varepsilon} - 1 \right]$  (бүтүн бөлүгү) деп алууга болот.  $\varepsilon = 0,001$  болсо,

$N_\varepsilon = \left[ \frac{10}{0,001} - 1 \right] = [9999] = 9999$  болот. Ошентип берилген удаалаштыктын

алгачкы чектүү сандагы 9998 мүчөлөрү  $M_0 \left( 0; 5; -\frac{1}{4} \right)$  чекитин  $\varepsilon = 0,001$ -

аймакчасын сыртында, 9999 - мүчөсү 0,001 - аймакчасын чек арасында, калган чексиз көп  $n > 9999$  номерлүү

$M_{1000}, M_{1001}, M_{1002}, \dots, M_n, \dots$

мүчөлөрү  $0,001$  - аймакчасын ичинде жайгашкан болот. Бул  $M_0$  чекитинин пределдик чекит болорун далилдейт.

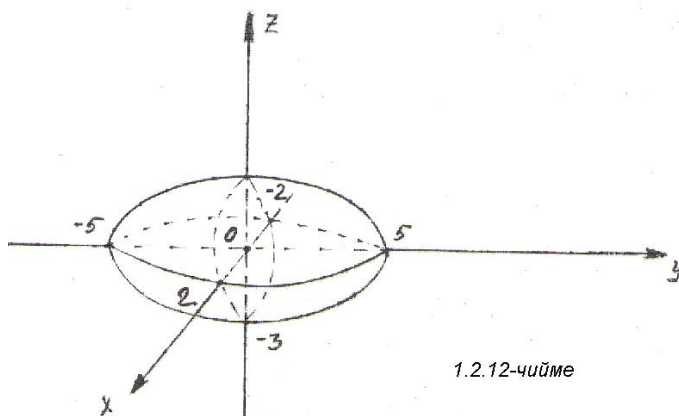
Табылган  $N_\varepsilon$  номери  $\varepsilon$  го ылайыкташып, андан көз каранды болот. Маселен,  $\varepsilon = 0,1$  десек  $N_\varepsilon = 99$  келип чыгат, ошондуктан табылган номерди жазууда  $\varepsilon$  санын индекс катарында көрсөтүп жазышат.  $\triangleleft$

$R^3$  мейкиндигинде  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$  же  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  шарты аткарылса, анда  $\{M_n\}$  чексиз кичине чоңдук деп аталат. Ошентип  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$  удаалаштыктарын баары чексиз кичине чоңдук болушса гана,  $\{M_n\}$  чексиз кичине болот же  $O(0;0;0)$  координата башталмасына чексиз жакындайт. Ал эми  $R^3$  мейкиндигинде чексиз чоң чоңдук болуу үчүн координаталарын бирөөсүн чексиз чоң чоңдук болушу жетиштүү. Чексиз чоң чоңдуктар - чексиз алыстатылган чекиттер катарында эсептелип,  $R^3$  мейкиндигин бүтөөр кыйырларында жайгашкан деп элестетилет:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |M_n| = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty \text{ же } \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = +\infty \text{ же } \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty.$$

$R^1$  мейкиндигинде областтар түз сызыктын кесиндилери,  $R^2$  де жалпак фигуралар болушса,  $R^3$  мейкиндигинде үч өлчөмдүү телолор катарында сүрөттөлүшөт.

$R^3$  мейкиндигиндеги областтын бардык чекиттерин үч координаталары тең чектүү сандар болушса, б.а. телону (областы) сыртынан чектеп турган шар куруу мүмкүн болсо, анда чектүү область, ал эми жок дегенде бир



координатасы чектелбесе эле же областты сыртынан чектеген шар куруу мүмкүн болбосо, анда чектелбеген область деп эсептейбиз.

$R^3$  мейкиндигинде да (1.2.5), (1.2.6) – аныктамаларын шарттарында ачык, туюк областтар жайгашып, алардын чек арасы же кабыгы катарында беттер эсептелишет. Ошондой эле бир жана көп байламталуу областтар кездешет.

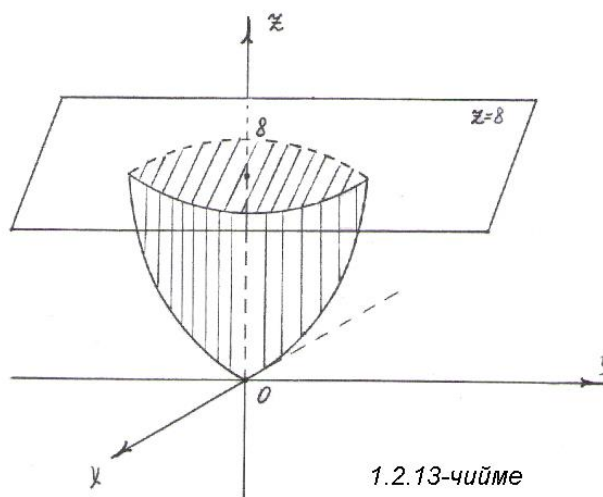
### Мисалы:

1.  $G = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} \leq 1; x, y, z \in R \right\}$  областы 1.2.12-чиймеде

көрүнгөндөй эллипсоиддин ички чекиттери, ал эми анын чек арасы же кабыгы эллипсоиддин чекиттеринен турат.

2.  $Q = \left\{ (x, y, z) : z \leq x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 8; x, y, z \in R \right\}$  областы жогору жагынан  $z = 8$  тегиздиги менен чектелген параболоиддин ички чекиттери болот (1.2.13-чийме). Чек арасы (кабыгы) болуп, параболоиддин жана  $z = 8$  тегиздигин  $x^2 + y^2 = 8$  шартын канааттандыруучу чекиттер эсептелишет.

Жалпы учурда  $R^1 \subset R^2 \subset R^3$  болуп, сан огу жана координаттык тегиздик  $R^3$  - мейкиндигинде жайгашкан чекиттерден куралгандыктан, кесиндилерди жана жалпак фигураларды да  $R^3$  мейкиндигиндеги областтар деп эсептөөгө болот. Ошентип декарттык координаталар системасы менен,  $R^3$  мейкиндигинде үч өлчөмдүү телолордун жайгашуу абалдарына, кыймылдарына салыштырып, реалдуу жаратылыш мейкиндигиндеги өзгөрүүчү бардык кубулуштарды сандык жактан мүнөздөө мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз.



### 1.2.5 $R^n$ мейкиндигин сандык моделин түзүү

Реалдуу турмушта үч өлчөмдүү мейкиндиктен жогорку өлчөмдүү мейкиндиктерди тикелей элестетип таанып үйрөнүүгө мүмкүнчүлүк аз. Ошондой болсо да  $R^1, R^2, R^3$  мейкиндиктерине аналогиялуу көрүнүштө  $R^n$  мейкиндигиндеги предметтерди сандар моделдештирүүгө болот. Ал үчүн байкоочу жайгашкан  $O$  чекитин тандап, ага карата  $n$  өлчөмдүү тик бурчтуу декарттык координаталар системасын түзөбүз. Ал үчүн кыялыбызда өз ара перпендикуляр деп элестеткен,  $O$  чекитинде кесилишүүчү  $n$  сандагы  $Ox_1, Ox_2, Ox_3, \dots, Ox_n$  сан окторун,  $R^n$

мейкиндигинде жайгашкан деи эсептейбиз. Түзүлгөн системаны борбору  $O$  чекити болгон  $n$  өлчөмдүү тик бурчтуу декарттык координаталар системасы деп атап,  $Ox_1, Ox_2, Ox_3, \dots, Ox_n$  сан окторун координаттык октор дейбиз. Бул координаттык окторго карата  $R^n$  мейкиндигин ар бир чекиттери  $n$  координаталарга ээ болушат. Ыңгайлуулук үчүн  $R^n$  дин чекиттерин  $x, y, \dots$  сыяктуу тамгалар менен белгилеп, аларды координаталары менен  $x(x_1; x_2; x_3; \dots; x_n), y(y_1; y_2; y_3; \dots; y_n), z(z_1; z_2; z_3; \dots; z_n), \dots$  көрүнүштө жазуу эрежесин кабыл алабыз. Кээде чекиттин координаталарын  $x = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$  көрүнүштө да жазууга болот. Мисалы,  $R^2, R^3$  мейкиндиктеринде  $x \in R^3$  болсо  $x(x_1; x_2; x_3); x \in R^2$  болсо  $x(x_1; x_2)$  координаталары менен жазылышат.

**1.2.12 Аныктама.**  $R^n$  мейкиндигинде жайгашкан  $x = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$  жана  $y = \{y_1; y_2; y_3; \dots; y_n\}$  чекиттерин арасындагы аралыктын чени же метрика деп, аралыктын үч аксиомаларын канааттандырган

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2} \quad (12)$$

чыныгы санын түшүнөбүз.

$R^n$  мейкиндиги (12) аралык эрежесине же метрикага карата ченелүүчү метрикалык мейкиндик болот, анткени (12) эрежеси метриканын бардык аксиомаларын канааттандырат.

▷ I – аксиоманы текшерүү:

(12) барабардыгын оң жагы жалаң оң сандардын суммасынан тургандыктан,  $\rho(x, y) = 0$  шарты бардык оң кошулуучулар нөлгө барабар болгондо гана аткарылат:

$$(y_k - x_k)^2 = 0 \text{ же } y_k = x_k, \quad k=1, 2, \dots, n \text{ же } x = y.$$

II – аксиоманы текшерүү:

$\rho(x, y) = \rho(y, x)$  болот, анткени  $(y_k - x_k)^2 = (x_k - y_k)^2$  барабардыгы орун алат.

III – аксиоманы текшерүү:

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \text{ үч бурчтук аксиомасы}$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (z_k - y_k)^2} \quad (13)$$

көрүнүштө жазылып,  $R^2, R^3$  мейкиндиктериндеги үч бурчтук аксиомаларын жалпылап турат.  $y_k - x_k = a_k$  жана

$$z_k - y_k = b_k, z_k - x_k = a_k + b_k \quad \text{белгилөөлөрүн жардамы менен} \quad (13)$$

барабарсыздыгын

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \quad (14)$$

көрүнүшкө келтиребиз. Бул барабарсыздыктын тууралыгы **Коши – Буняковскийдин** барабарсыздыгы деп аталган

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad (15)$$

барабарсыздыгына таянып, (14) тү өзгөртүп түзүү менен көрсөтүлөт. Коши – Буняковскийдин (15) барабарсыздыгынын тууралыгы

$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - b_i a_j)^2$  теңдештигинен терс экинчи кошулуучуну таштап жибергенден келип чыгат (теңдештик мат. индукция усулу менен далилденет). Ал эми

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \stackrel{(15)}{\leq} \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2} + \sum_{k=1}^n b_k^2 = \left( \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2$$

болгондуктан, (14) барабарсыздыгын тууралыгына же үч бурчтук аксиомасын аткарылышына ишенебиз.  $\triangleleft$

Аралыкты ченөө эрежеси болгон (12) метрикасын башка усулдар менен аныктап,  $R^n$  мейкиндигинде жайгашкан чекиттерди тартиптештирүүдө, чекиттердин аралыгын жана жакындоо, алыстоо

абалдарын үйрөнүүгө да болот. Мисалы,  $\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |y_k - x_k|$ ,

$\rho_2(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - x_k|$  сандарын деле  $x$  жана  $y$  чекиттеринин

арасындагы аралык же метрика деп,  $R^n$  мейкиндигин ушул аралык эрежелерине карата ченелүүчү же метрикалык мейкиндик деп эсептөөгө болот.



$R^n$  мейкиндигинде кабыл алынган (12) метрикага таянып,  $x^0 = \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$  чекитинин чеке бели же  $\varepsilon$  - аймакчасы катары  $\rho(x^0, x) < \varepsilon$  шартын канааттандыруучу  $x(x_1; x_2; \dots; x_n)$  чекиттерин көптүгүн түшүнөбүз.  $R^n$  мейкиндигиндеги чекиттердин  $x^1, x^2, x^3, \dots, x^k, \dots$

удаалаштыгы координаталары боюнча ар түрдүү  $n$  сызыктуу

$$\begin{cases} x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_1^k, \dots, \\ x_2^1, x_2^2, x_2^3, \dots, x_2^k, \dots, \\ x_3^1, x_3^2, x_3^3, \dots, x_3^k, \dots, \\ \text{-----} \\ x_n^1, x_n^2, x_n^3, \dots, x_n^k, \dots \end{cases}$$

удаалаштыктардын системасын түзүшөт. Ошентип  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^0$  предели,

бир өлчөмдүү  $R^1$  мейкиндигиндеги кадимки  $n$  удаалаштыктардын системасын пределдик маанилери менен аныкталат, б.а.:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} x_1^k = x_1^0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_2^k = x_2^0, \\ \text{-----} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^k = x_n^0. \end{cases} \quad (16)$$

Ошондуктан  $R^n$  мейкиндигиндеги удаалаштыктар  $R^1$  мейкиндигиндеги удаалаштыктардын жана алардын пределдерин бардык касиеттерине баш ийет.  $n = 3$  болсо, (16) пределдери (11) пределдердей көрүнүштө жазылышат.

$R^n$  мейкиндигинде жайгашкан ар бир чекит пределдик чекит болот, аны  $\varepsilon$  - аймакча алуу менен аралыктар тилинде көрсөтүүгө болот. Мындан сырткары  $R^n$  мейкиндигиндеги областтарды  $n$  өлчөмдүү телолор деп, аларды да ачык жана туюк областарга бөлүп карайбыз. Эгерде  $x \in R^n$  чекитин жок дегенде бир координатасы чексиз чоң болсо, анда аны чексиз чоң чоңдук же чексиз алыстатылган чекит, ал эми

бардык координаталары «ЧК» болсо, аны чексиз кичине чоңдук деп түшүнөбүз.

Көп адабияттарда  $R^n$  мейкиндигин (12) метрикасына карата арифметикалык мейкиндик деп аташат. Ошентип  $R^n$  бардык пределдик чекиттерин кармап турган толук метрикалык мейкиндик болот.

## 2. Мисалдар

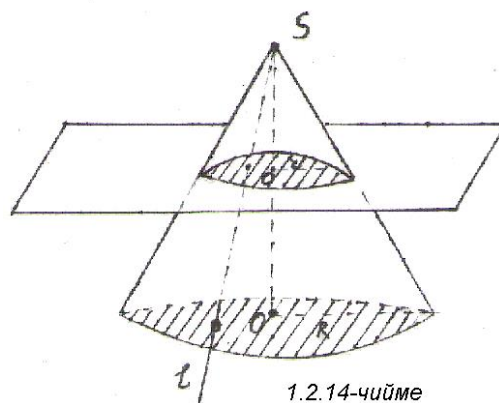
1.  $N, Z, Q, R$  көптүктөрүн элементтеринде:
    - а) коңшулаш жайгашкан элементтер барбы, болсо көрсөткүлө?
    - б) элементтерин сандарын салыштыргыла;
    - в) аларда аткарылуучу амалдарды санагыла;
    - г) бул көптүктөрдүн элементтерин пайдаланып ченөө, өлчөө иштерин жүргүзүүгө болобу? Эгерде болбосо, бул көптүктөр кандай муктаждыктар үчүн гана колдонулат?
  2. Бардык 5 ке бөлүнүүчү натуралдык сандардын көптүгүн кубатын тапкыла (Жообу: санаттык  $a$  кубатына ээ)
  3. Бирден баштап 1000 ге чейинки натуралдык сандардын көптүгүн кубатын тапкыла (Жообу: 1000).
  4. 100 дөн баштап 15 санына чейинки аягы “0” цифрасы менен бүткөн бүтүн сандардын көптүгүн кубатын тапкыла (Жообу: 12).
  5. Бардык так бүтүн сандар менен жуп бүтүн сандардын көптүктөрү эквиваленттүү болуп, кубаттары  $Z$  көптүгүн кубатына тең экендигин далилдегиле.
  6. а)  $[-1, 5]$  аралыгы менен  $[-7; 23]$  аралыгында жайгашкан чекиттердин көптүгүн кубатын тапкыла.  
б)  $[a; b] \sim R$  болорун далилдегиле.
10. Төмөндөгү чекиттерди мейкиндиктерде жайгаштырып, арасындагы аралыктарды эсептегиле:
- а)  $A(-1; 3)$  менен  $B(4; -5)$ ;                      г)  $C\left(\frac{2}{3}; -6\right)$  менен  $\Phi\left(-8; -\frac{3}{5}\right)$ ;  
б)  $K(-1; 3; 3)$  менен  $B(4; -5; 0)$ ;                      д)  $C\left(\frac{2}{3}; -6; 1\right)$  менен  $\Phi\left(-8; -\frac{3}{5}; 2\right)$ ;
11. Үч бурчтуктун чокуларынын координаталары  $A(-4; 3)$ ,  $B(5; -7)$ ,  $C(0; 9)$  болгону белгилүү болсо, үч бурчтуктун периметрин эсептегиле.
12. Төмөндөгү сандардын  $Q$  көптүгүнө пределдик чекит болорун: а) оң жагынан; б) сол жагынан; в) эки жагынан тең жакындоочу удаалаштыктарды түзүү менен далилдегиле.
- $\frac{2}{3}; 7; -\frac{1}{4}; 145.$

2.1. Тегиздиктеги  $A = \{(x; y): 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1; x, y \in R\}$  квадраттын ичинде жайгашкан чекиттердин көптүгүндө канча чекит болсо,  $B = (0, 1)$  интервалында да ошончо чекит бар экенин далилдегиле.

**Далилдөө:**  $\triangleright$   $A$  квадратын ичинде жайгашкан чекиттердин ар биринин эки  $(x; y)$  координаталары бар жана алар  $0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$  шарттарын канааттандырган чыныгы сандар болушат. Ошондуктан ал чыныгы сандарды  $x = 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \quad y = 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  көрүнүштөгү чексиз ондук бөлчөк көрүнүшүндө жаза алабыз.

$B = (0, 1)$  интервалындагы чекиттерди  $z$  деп белгилеп, аны  $z = 0, \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \beta_3 \dots$  чексиз ондук

бөлчөк көрүнүштө жазуу менен,  $A$  квадратын  $(x; y)$  чекиттерин,  $B$  интервалын  $z$  чекиттерине өз ар бир маанилүү тиешелеш коюуга болот. Мындай жазылган  $z$  саны бирден кичине нөлдөн чоң болуп, сөзсүз  $B$  интервалында жайгашкан болот. Демек,  $B$  интервалында  $A$  квадратындагы чекиттерден кем эмес сандагы чекиттер бар. Ушундай эле талкуулоону тескери тартипте жүргүзүп,  $A$  квадратында да  $B$  интервалындагы чекиттерден кем эмес чекиттер бардыгына ишенебиз. Ошентип  $\mu(A) = \mu(B) = c$  же  $A \approx B$ .  $\triangleleft$

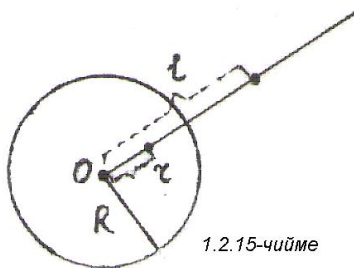


2.2. Тегиздикте жайгашкан радиустары  $r, R$  болгон  $(r < R)$  тегеректердин ичинде бирдей сандагы чекиттер жайгашканын көрсөткүлө.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Тегеректерди борбору бир чекитте боло тургандай жылдырууга мүмкүн болгон концентрикалык деп эсептейли. Негизин радиусу  $R$  болгон конус тургузуп, конусту кескенде радиусу  $r$  болгон тегерек келип чыга тургандай бийиктиктен конустун негизине параллель тегиздик менен кесүү жүргүзөлү (1.2.14-чийме). Конустун  $S$  чокусунан жүргүзүлгөн  $l$  шоолалардын жардамы менен бул эки тегеректин чекиттеринин сандары барабар экендигине ишенүүгө болот.  $\triangleleft$

2.3. Тегиздикте жайгашкан радиусу  $R = 5$  болгон тегеректин ичинде канча чекит болсо, анын сыртында жаткан тегиздиктин бөлүгүндө ошончо чекит бар экенин көрсөткүлө.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Борбору  $O$  чекити, радиусу  $R = 5$  болгон тегеректин борборунан чыгуучу шоола жүргүзөлү (1.2.15-чийме).



Шооладан тегеректин ички бөлүгүндө  $O$  борборунан  $r$  аралыгында жайгашкан чекитти тандайлы. Анда

$$\ell = \frac{5}{r} \quad \text{барабардыгын жардамы менен } O$$

борборунан  $\ell$  аралыгында жайгашкан  $\ell$  чекитин табууга болот.

Бул барабардыктын жардамы менен тегеректин ички бөлүгүндөгү шооланын ар бир чекиттерине, шооланын сырткы бөлүгүнөн бирден чекиттерди тиешелеш коё алабыз жана тескерисинче. Натыйжада шооланын сырткы жана ички бөлүктөрүндө жайгашышкан бардык чекиттер өз ара бир маанилүү тиешелеш коюлуп, тең санда болушат. Шооланы  $O$  борборун айланасында буруу менен тегеректин бардык ички чекиттерин, тегеректин сыртындагы чекиттерге тиешелеш коюуга болот. Эгерде  $r$  чекити борборго жакындаса,  $\ell$  чекити чексиз алыскы чекитке жакындайт. Мындай тиешелештикте тегеректин чек арасы болгон айлананын чекиттери гана өздөрүнө тиешелеш болот.  $\triangleleft$

2.4. Ар кандай айланада жайгашкан бардык чекиттердин көптүгү менен каалагандай түздөгү чекиттердин көптүгүнүн эквиваленттүү болорун көрсөткүлө.

$$2.5. \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{герде } x \neq y, \\ 0, & \text{эгерде } x = 0 \end{cases} \quad \text{эрежеси менен аныкталган метрика,}$$

каалагандай  $A$  көптүгү үчүн метрика болорун далилдегиле ( $x, y \in A$ ).

2.6.  $R^1$  түзүндө төмөндөгү эрежелер метрика болобу?  $x, y \in R^1$ .

- а)  $\rho(x, y) = |x - y|$ ; (Жообу: Болот)
- б)  $\rho(x, y) = x^3 - y^3$ ; (Жообу: Болбойт)
- в)  $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$ ; (Жообу: Болот)
- г)  $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$ ; (Жообу: Болот)
- д)  $\rho(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$ ; (Жообу: Болот)
- е)  $\rho(x, y) = (x^2 + 2y^2) \cdot |x - y|$ ; (Жообу: Болот)
- ж)  $\rho(x, y) = |\sin(x - y)|$ ;

Акыркысын текшерип көрөлү:  $\triangleright x = 0, y = \pi$  болсун,  $\rho(0, \pi) = |\sin(0 - \pi)| = |\sin(-\pi)| = |-\sin \pi| = |\sin \pi| = 0$ . Мындан метриканын I -

аксиомасын аткарылбасын, б.а.  $x \neq y$  болсо деле  $\rho(x, y) = 0$  болорун көрөбүз. Демек, бул эреже метрика боло албайт.  $\triangleleft$

2.7.  $A$  көптүгүндө  $\rho(x, y)$  метрика болору белгилүү болсо,  $\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$  аралык-эрежеси да  $A$  көптүгүндө метрика болорун далилдегиле.

**Далилдөө:**  $\triangleright$  Метриканын алгачкы эки аксиомасын аткарылышы  $\rho(x, y)$  тин метрика экендигинен келип чыгат. Метриканын III – аксиомасын аткарыларын көрсөтөлү. Айталы,

$\rho(x, y) = a, \rho(x, z) = b, \rho(y, z) = c$  сандары болсун дейли. Анда

$\rho_1(x, y) = \frac{a}{1+a}, \rho_1(x, z) = \frac{b}{1+b}, \rho_1(y, z) = \frac{c}{1+c}$  болуп, метрикалар

катарында  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$  оң сандары жана  $\rho$  үчүн үч бурчтук аксиомасы аткарылгандыктан,  $a \leq b + c$  деп эсептейбиз. Ошондуктан

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y) &= \frac{a}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a} \leq 1 - \frac{1}{1+b+c} = \frac{b+c}{1+b+c} = \frac{b}{1+b+c} + \frac{c}{1+b+c} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = \\ &= \rho_1(x, z) + \rho_1(y, z) \end{aligned}$$

үч бурчтук аксиомасы аткарылып,  $\rho_1(x, y)$  эрежеси  $A$  көптүгүндө метрика боло алат.  $\triangleleft$

2.8.  $R^3$  мейкиндигинде берилген

$$\{M_n(x_n; y_n; z_n)\} = \left\{ \left( \frac{2n-3}{4n+5}; \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}; \frac{5n+6}{n+1} \right) \right\}$$

удаалаштыгын пределдик чекити  $M_0\left(\frac{1}{2}; 0; 5\right)$  болорун далилдегиле.

2.9. Удаалаштыктардын суммаларын, көбөйтүндүлөрүн, тийиндилерин пределдери жөнүндөгү касиеттерди пайдаланып, төмөндөгү удаалаштыктардын пределдерин тапкыла.

а)  $x_n = \frac{3-n}{2n+1} - \frac{3n^2+2}{4n^2+1};$  Жообу:  $\left(-\frac{5}{4}\right)$

б)  $y_n = \frac{2n}{2n^2-1} \cos \frac{n+1}{2n-1};$  (Жообу: 0)

в)  $a_n = \frac{(-1)^n n}{2n-1} \cdot \frac{n}{n^2+n+1};$  (Жообу: 0)

г)  $a_n = \frac{1-n-n^3}{(3n+1)^2};$  (Жообу:  $-\infty$ )

д)  $z_n = \frac{a^n}{1+a^n}$  ( $a \neq -1$ ); (Жообу:  $a \neq 0$  болсо 1,  $a = 0$  болсо 0)

е)  $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt{n}}$ ; (Жообу:  $\infty$ )

ж)  $c_n = \sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{n^2-4n+3}$ ; (Жообу: 3)

з)  $d_n = \sqrt[3]{n^2-n^3} + n$ ; (Жообу:  $\frac{1}{3}$ )

и)  $x_n = \frac{n + \lg n + 2^n}{n^2 + \lg n - 2n}$ ; (Жообу: -1)

к)  $x_n = \frac{2n}{2n^2+1} \sin \frac{n-1}{2n-1} + \frac{n}{2n-1} \cdot \frac{n(-1)^n}{n^2+1}$ ; (Жообу: 0)

2.10. Тегиздикте

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y+2)^2 < 25 \\ x-2y-3 < 0, \end{cases} \quad \text{шарттарын канааттандыруучу } M(x; y)$$

чекиттеринин көптүгү кандай область болот?

2.11. Тегиздиктеги

$$\begin{cases} y > x^2 \\ x^2 + y^2 < 20, \end{cases} \quad \text{шарттарын канааттандыруучу } M(x; y)$$

чекиттеринин областын тапкыла.

2.12.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \geq 36, \\ 2x - 3y + z - 2 \geq 0, \end{cases} \quad \text{областын түшүндүргүлө.}$$

2.13. Төмөнкү областтарды түшүндүргүлө.

а)  $y^2 \geq 6x$ ;

б)  $(x-4)^2 + (y+6)^2 \leq 25$ ;

в)  $x^2 + 6x + y^2 - 2y - 26 > 0$ ;

г)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ;

д)  $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ ;

е)  $4 \leq x^2 + z^2 \leq 16$ ;

ж)  $x \leq y \leq x^2$ ;

з)  $\begin{cases} x^2 + y^2 > 9, \\ x^2 + y^2 < 16; \end{cases}$

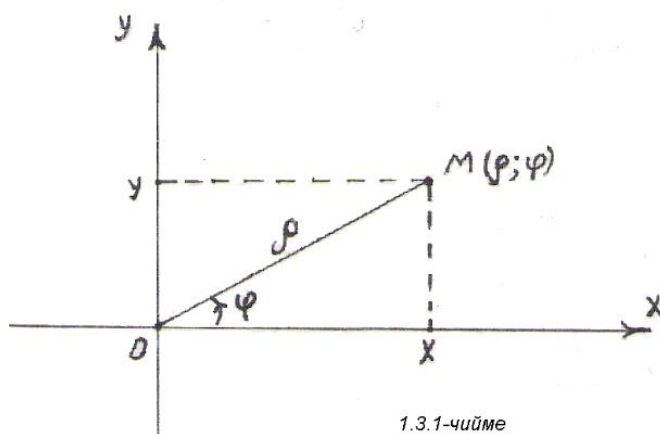
и)  $\begin{cases} 0 < x^2 + y^2 < 25, \\ y > 2x^2; \end{cases}$

$$к) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \leq 0, \\ x + y - 2z > 0. \end{cases}$$

## §1.3 Мейкиндик чекиттерин полярдык, цилиндрдик, сфералык координаталар менен даректештирүү

### 1.3.1 Полярдык координаталар системасы

$R^2$  тегиздигинде (мейкиндигинде) жайгашкан чекиттерди декарттык координаталар системасы менен катар эле, полярдык координаталар системасында даректештирип таанууга болот.



Айталы  $Oxy$  декарттык координаталар тегиздигинде  $M(x; y)$  чекити берилип,  $O$  башталмасынан  $M$  чекитине чейинки аралык  $\rho$  санына, ал эми  $Ox$  координаттык огу менен

$|OM|$  дин арасындагы оң бурч  $\varphi$  ге тең дейли (1.3.1 - чийме). Бул учурда тегиздиктин ар бир  $M(x, y)$  чекитине бир гана  $(\rho; \varphi)$  түгөй сандары туура келип, иш жүзүндө  $M$  чекитин  $\rho, \varphi$  координаталарына ээ деп эсептөөгө болот. Ошентип, тегиздикте жайгашкан  $M$  чекитин дарегин  $(x; y)$  декарттык координаталарынан башка,  $(\rho; \varphi)$  координаталары менен белгилөө мүмкүнчүлүгү бар.  $O$  чекити полярдык координаталар системасын уюлу, ал эми  $\rho, \varphi$  полярдык координаталар деп аталышат. Мындай ыкмада даректештирүү полярдык координаталар системасы деген атты алып, декарттык координаталар системасы менен

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (1)$$

байланышында болот ( $\triangle OMy$  тик бурчтуу үч бурчтугунан  $\cos \varphi = \frac{x}{\rho}$ ,  $\sin \varphi = \frac{y}{\rho}$  алынат).

$R^2$  тегиздигинде жайгашкан бардык чекиттерди полярдык координаталар системасында бир маанилүү жазып көрсөтүү үчүн,

$\varphi$  бурчун  $0 \leq \varphi \leq 360^\circ = 2\pi$  аралыгында өзгөрөт деп түшүнүү керек, анткени  $\varphi$  бурчу  $O$  полюсунун айланасында эки жолу же андан көп  $k$  жолу айланса, анда бир эле  $M$  чекитинин полярдык координаталары төмөндөгүдөй көп мааниде жазылып калат:

$$(\rho; \varphi), (\rho; \varphi + 2\pi), (\rho; \varphi + 4\pi), \dots, (\rho; \varphi + 2\pi k).$$

Мында  $k$  айлануулардын саны ( $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k > 0$  болсо оң жакка,  $k < 0$  сол жакка айланат). Ошентип бир эле  $M$  чекитине ар түрдүү координата - даректер коюлуп, тегиздиктеги чекиттерди бир маанилүү даректештирүү принциби бузулат, б.а.  $0 \leq \varphi \leq 360^\circ = 2\pi$  чектөөсү коюлбаса, полярдык координаталар системасы өз маанисин жоготуп, анык бир даректи көрсөтө албайт.

(1) байланыш формуласынан чекиттин декарттык жана полярдык координаталарын арасындагы түрдүү байланыштарды келтирип чыгарууга болот. (1) системасындагы барабардыктардын эки жагын тең квадратка көтөрүп, кошуп

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2$$

$$\text{же } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

табылат.

Аларды өз ара мүчөлөп бөлүп,  $\frac{y}{x} = \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi$  же

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (3)$$

ээ болобуз.

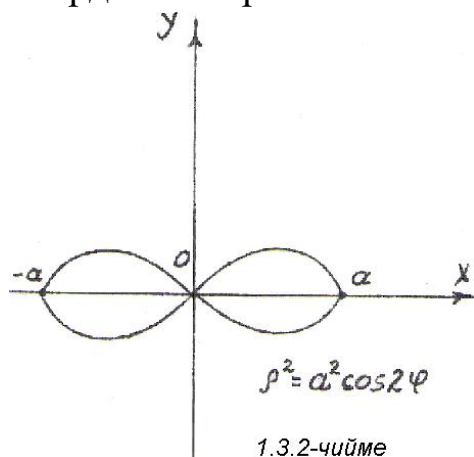
Ошондой эле,  $\triangle OMx$  тик бурчтуу үч бурчтугун  $\varphi$  бурчуна карата

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (4)$$

байланыштарына ээ болобуз.



$R^2$  тегиздигинде жайгашкан айрым фигураларды декарттык координаталар системасында айкын жазып көрсөтүү ыңгайсыз болгон



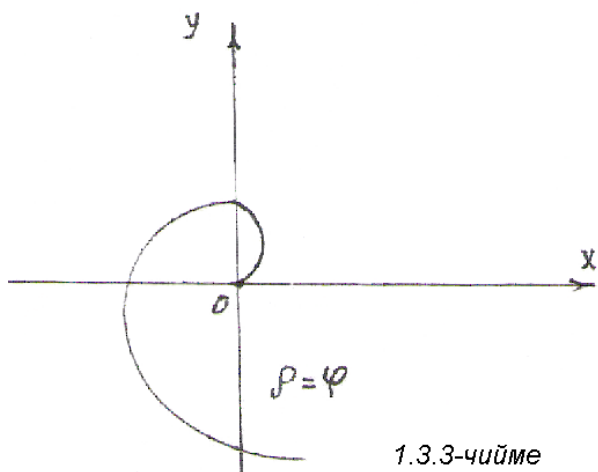
учурларда, эсептөө иштерин жеңилдетүү үчүн полярдык координаталар системасы колдонулат. Мындан сырткары асманда жана деңизде кыймылдаган объекттерге байкоо жүргүзүү, көбүнчө  $O$  уюлунда байкоочу турган полярдык координаталарда ишке ашырылат.

**Мисалдар:**

1. Бернуллинин лемнискаты деп аталуучу ийри

$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  теңдештиги менен берилип, мындан  $y$  өзгөрүлмөсүн  $x$  өзгөрүлмөсү аркылуу айкын  $y = f(x)$  көрүнүштө жазуу кыйынчылыкты туудурат. (1) байланышын пайдаланып, Бернуллинин

лемнискатын полярдык координаталар системасында  $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$  деп жазабыз (1.3.2 – чыйме)



2. Архимеддин спиралы деп аталуучу ийри  $x^2 + y^2 = \arctg^2 \frac{y}{x}$

теңдештигин канааттандыруучу  $(x; y)$  координаталуу чекиттердин

геометриялык изи болот (1.3.3-чыйме). Архимеддин спиралы полярдык координаталар системасында  $\rho = \varphi$  теңдештиги менен жазылып,  $\varphi$  чектелген эмес деп алынат, анткени айлануудан кийин чекиттер кайра мурдагы ордуна кайталанып келбейт.

3.  $x^2 + y^2 = 9$  айланасы полярдык координаталар системасында  $\rho = 3$  теңдемеси менен берилет.

4. Декарттык координаталары менен берилген  $M(-1; 1)$  чекитин полярдык координаталар системасында жазуу үчүн (2), (4) формулаларды пайдаланабыз:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Мындан  $\varphi = 135^\circ$ ,  $\rho = \sqrt{2}$  келип чыгып, берилген чекит полярдык координаталарда  $M(135^\circ; \sqrt{2})$  көрүнүштө жазыларын көрөбүз.

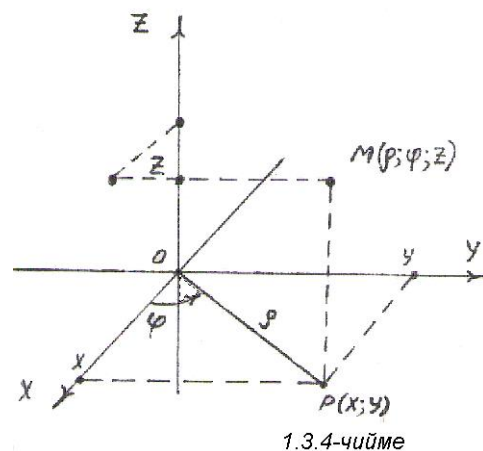
### 1.3.2 Цилиндрдик координаталар

$R^3$  мейкиндигинде жайгашкан чекиттерди тик бурчтуу декарттык координаталар системасында  $M(x; y; z)$  көрүнүштө даректештирип жазуу менен катар эле, цилиндрдик деп аталуучу  $M(\rho; \varphi; z)$  координаталары аркылуу бир маанилүү даректештирип жазууга да болот. Мында  $\rho, \varphi$  деп  $M$  чекитин  $Oxy$  тегиздигине түшүрүлгөн проекциясы болгон  $P$  чекитин полярдык координаталары, ал эми  $z$  деп  $M$  чекитин декарттык координаталар системасындагы аппликаты алынат (1.3.4 – чийме). Эгерде  $M$  чекити  $Oxy$  тегиздигинин жогору жагында болсо  $z$  оң, ал эми төмөн жагында жайгашса, терс сан болот. Ошентип цилиндрдик координаталар  $0 \leq \rho < +\infty$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $-\infty < z < +\infty$  аралыктарында өзгөрө алышат. Цилиндрдик координаталар менен декарттык координаталардын арасындагы байланыш

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z \end{cases} \quad (5)$$

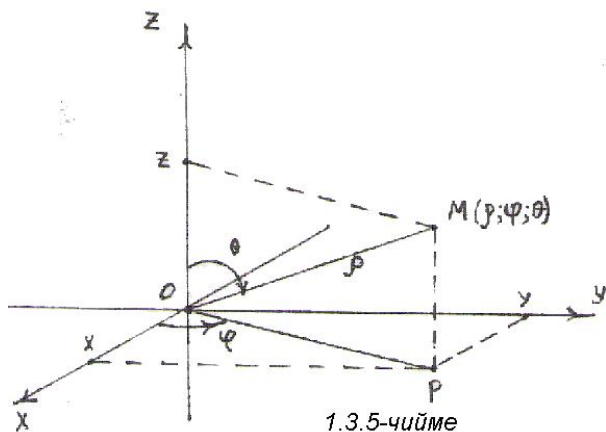
формулалары менен ишке ашырылат.

**Мисалы:**  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  сферасын цилиндрдик координаталарда жазалы. (5) - байланыш формулаларын пайдаланып, сфераны  $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + z^2 = R^2$  же  $\rho^2 + z^2 = R^2$  же  $z^2 = R^2 - \rho^2$  көрүнүштөрдө жаза алабыз. Акыркы теңдемени  $z$  ке карата чечип, айкын көрүнүштө сферанын  $Oxy$  тегиздигинен



жогорку бөлүгүн  $z = \sqrt{R^2 - \rho^2}$ , төмөн жагындагы бөлүгүн  $z = -\sqrt{R^2 - \rho^2}$  көрүнүштөрдө жазууга болот.

### 1.3.3 Сфералык координаталар



$R^3$  мейкиндигинде жайгашкан чекиттерди сфералык деп аталуучу  $(\rho; \varphi; \theta)$  координаталар менен да тартиптештирип даректештирүүгө болот. Ал үчүн үч ченемдүү тик бурчтуу  $Oxyz$  декарттык координаталар системасын  $O(0; 0; 0)$  башталмасын уюл катарында

тандап, мейкиндикте жайгашкан  $M$  чекитинен  $O$  уюлуна чейинки аралыкты  $\rho$ ,  $M$  чекитин  $Oxy$  тегиздигиндеги проекциясы  $P$  чекитине карата түзүлгөн  $|OP|$  кесиндиси менен  $Ox$  огу түзгөн бурчтуу  $\varphi$ ,  $|OM|$  кесиндиси менен  $Oz$  аппликатынын арасындагы бурчтуу  $\theta$  аркылуу белгилейбиз (1.3.5-чыйме).

Натыйжада декарттык координаталар системасында  $M(x; y; z)$  координаталары менен сүрөттөлгөн чекит, сфералык координаталар менен  $M(\rho; \varphi; \theta)$  көрүнүштө жазылат. Мейкиндиктин чекиттерин абалын мындай көрүнүштө даректештирүү, сфералык координаталар  $0 \leq \rho < +\infty$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  аралыктарында өзгөрүлгөн кезде өз ара бир маанилүү болот, б.а. бир чекитке бир гана сфералык координаталардын үчтүгү тиешелеш болот жана тескерисинче.

Сфералык координаталар менен декарттык координаталардын арасындагы байланыш

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases} \quad (6)$$

формулалары менен ишке ашырылат.

**Мисалы:**

1.  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  сферасын теңдемесин сфералык координаталарда жазалы. (6) байланышын пайдаланып

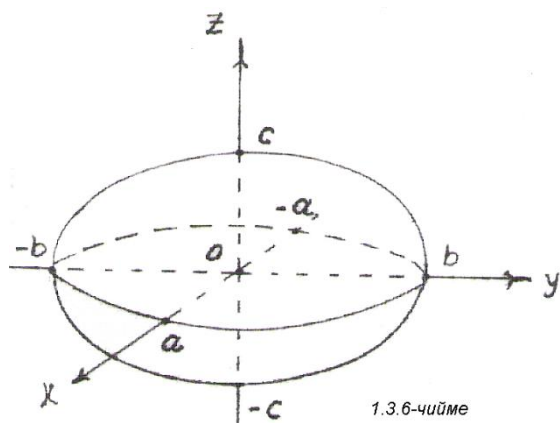
$$\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = R^2,$$

же  $\rho^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \rho^2 \cos^2 \theta = R^2$ , же  $\rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta = R^2$ ,  
же

$\rho^2 = R^2$ , же  $\rho = R$  көрүнүштөгү сфералык координаталарда жазылган сферанын теңдемесине ээ болобуз.

2.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  эллипсоиддин теңдемеси сфералык координаталарда

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \sin \theta, \\ y = b \sin \varphi \sin \theta, \\ z = c \cdot \cos \theta. \end{cases} \text{ көрүнүштөгү байланышта жазылат (1.3.6 -чийме).}$$



### Эскертүү.

Сан мейкиндигинде жайгашкан чекиттерди координаталар менен тартып теширип даректештирүү ыкмасы: тик бурчтуу декарттык, полярдык, цилиндрдик, сфералык координаталар системасынан башка ыкмалар менен да жүргүзүлөт. Жаратылыш чөйрөсү учу - кыйыры

жок көз таанымын күчү жетпеген сырларды кармап тургандыктан, болуп жаткан кубулуштарды элестетип моделдерин болжолдоодо, өз ара перпендикуляр болбогон, эркин бурчтуу координаттык октуу системалар, кээде координаттык октордун ордуна координаттык ийрилер болгон координаттык системалар пайдаланылат.

## 2. Көнүгүүлөр

3.1. Декарттык координаталар системасында берилген ийрилердин теңдемелерин полярдык координаталарда жазгыла жана ийрилерди сызып көрсөткүлө:

а)  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ ;

б)  $a(x^3 + y^3) = (x^2 + y^2)$ ;

в)  $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$ ;

г)  $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ ;

д)  $x^4 + y^4 = a^2xy$ .

3.2. Декарттык координаталар системасында берилген областтарды полярдик координаталарда жазып көрсөткүлө.

а)  $x^2 + y^2 \leq R^2$  областын;

б)  $x^2 + y^2 \leq ax$  областын;

в)  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $x^2 + y^2 = 8x$  тегеректери жана  $y = x$ ,  $y = 2x$  түздөрү менен чектелген областын;

г)  $y = x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  түздөрү менен чектелген областын;

д)  $x + y = 2$  түзү менен  $x^2 + y^2 \leq 4$  тегерегин кесилишинен пайда болгон кичине сегмент көрүнүштөгү областын;

3.3. Декарттык координаталар системасында жазылган областтарды цилиндрдик, сфералык координаталарда жазып көрсөткүлө:

а)  $x^2 + y^2 = R^2$  цилиндри,  $z = 0$ ,  $z = 1$  жана  $y = x$ ,  $y = x \cdot \sqrt{3}$  тегиздиктери менен чектелген биринчи октантта жайгашкан областты;

б)  $x^2 + y^2 = 2x$  цилиндри,  $z = 0$  тегиздиги жана  $z = x^2 + y^2$  параболоиди менен чектелген областты;

в)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  шарынын биринчи октантта жайгашкан бөлүгүн;

г)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  жана  $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$  шарларын жалпы бөлүгүн.

## § 1.4 Комплекстик сандар

### 1.4.1 Комплекстик сандар түшүнүгү

Чөйрөдө жайгашкан жетишерлик кичинеден баштап, эбегейсиз чоңго чейинки бардык нерселерди сандар менен белгилеп, салыштырып үйрөнүүгө  $\mathbb{R}$  чыныгы сандарын мейкиндиги жетиштүү болгондугуна карабастан, чөйрө таануу процессинде айрым кубулуштарды үйрөнүүдө чыныгы сандар менен түшүндүрө албаган учурлар кездешет. Мисалы, математикалык модели  $ax^2 + bx + c = 0$  квадраттык теңдемеси болгон кубулуштарга дискриминанты  $D = b^2 - 4ac \geq 0$  оң болгон учурда гана

түшүндүрмө берип,  $D < 0$  терс болгон учурда, терс сандан квадраттык тамыр чыкпагандыктан, чечимге ээ эмес деп чектелебиз. Бирок бул учурда деле ал кубулуш кайсы бир жыйынтыкта бүтүп, же уланып жүрүп натыйжага ээ болуусу мүмкүн. Мындай абалдарды сандык моделдер менен сүрөттөө үчүн,  $R$  чыныгы сандары жетишсиз болуп, аны жаңы  $C$  комплекстик сандардын талаасына кеңейтебиз.

**1.4.1 Аныктама.** Квадраты “ - 1” ге барабар болгон санды  $i$  тамгасы менен белгилеп, “жалган бирдик” деп айтабыз ( $i^2 = -1$ ). Эркин тандалган  $x, y \in R$  чыныгы сандары менен түзүлгөн  $z = x + iy$  суммасын,  $Z$  комплекстик саны деп атайбыз.  $x$  ти  $Z$  комплекстик санын чыныгы бөлүгү ( $x = \operatorname{Re} z$ ), ал эми  $y$  ти жалган бөлүгү ( $y = \operatorname{Im} z$ ) деп атап, бардык комплекстик сандардын көптүгүн  $C$  тамгасы менен белгилейбиз.

Кеңейтүүнүн натыйжасында терс чыныгы сандардан квадраттык тамыр чыгаруу мүмкүнчүлүгүнө ээ болдук. Мисалы,  $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \cdot 4} = \sqrt{i^2 \cdot 4} = i2$  комплекстик сан болот. Ошентип  $C$  комплекстик сандарын көптүгү, эки түгөй  $(x; y)$  чыныгы сандарын көптүгү катарында элестетилип, тегиздиктеги чекиттерге окшоштурулат. Комплекстик сандарын көптүгүн кубаты (элементтеринин саны)  $R$  чыныгы сандарын кубатына барабар болуп,  $\mu(C) = \mu(R) = c$  континиум кубатына ээ. Символикалык түрдө  $C$  көптүгүн  $C = \{ z : z = x + iy \wedge x, y \in R \}$  көрүнүштө жазууга болот.

**Комплекстик сандарды колдонуп, кадимки чыныгы сандар сыяктуу эсептөө, санак, ченөө иштерин жүргүзө албаганыбызга карабай, аларды математикалык символ-тамга катарында кабыл алып, атайын амал-эрежелерди киргизүү менен комплекстик сандардын математикалык теориясын түзүп, практикалык колдонууга ылайыкташтырабыз.**

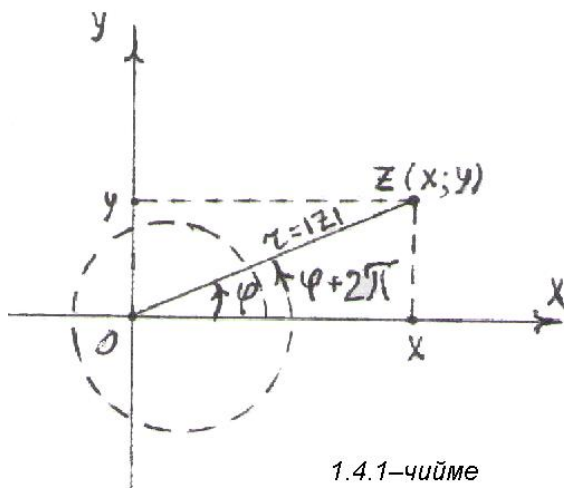
**1°.**  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$  болгон  $z = 0 + i0 = 0$  саны  $z = 0$  нөл комплекстик саны, ал эми  $z = 1 + i \cdot 0 = 1$  саны  $z = 1$  бир комплекстик сандары болушат.

**2°.**  $\operatorname{Im} z = y = 0$  болгондо  $z = x + i \cdot 0 = x$  саны чыныгы сан болуп, бардык чыныгы сандарды жалган бөлүгү нөлгө барабар болгон комплекстик сандар деп эсептейбиз. Демек,  $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$  болуп,

бардык чыныгы сандар комплекстик сандардын көптүгүндө кармалып турушат.

**3°.** Эки  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  сандары барабар болсо, анда  $\operatorname{Re} z_1 = x_1 = x_2 = \operatorname{Re} z_2$ ,  $\operatorname{Im} z_1 = y_1 = y_2 = \operatorname{Im} z_2$  барабардыктары орун алат жана тескерисинче.

**4°.** Комплекстик сандардын суммасы (айырмасы) деп алардын чыныгы бөлүктөрүн жана жалган бөлүктөрүн өздөрүнчө кошуп (кемитип) чыгуудан кийин пайда болгон комплекстик санды айтабыз:



1.4.1-чийме

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \quad (1)$$

Комплекстик сандарды кошуу (кемитүү) чыныгы сандарды кошуу (кемитүү) эрежелерине окшош жүргүзүлүп:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

$$\text{коммутативдүүлүк } z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

касиеттерине ээ болот.  $z$

комплекстик санына карама – каршы

комплекстик санды “ $-z = -x - iy$ ” деп, алардын суммасын  $z + (-z) = 0$  нөл комплекстик санына барабар дейбиз.

**5°.** Эки  $z_1, z_2$  комплекстик сандарын көбөйтүү кашааларды көбөйтүү эрежеси сыяктуу көбөйтүлүп,  $i^2 = -1$  болору эске алынат:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1y_2 + y_1 \cdot x_2). \quad (2)$$

Бул көбөйтүү эрежеси бир канча комплекстик сандарды көбөйтүүдө да сакталып, ассоциативдүүлүк  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1(z_2 \cdot z_3)$ , көбөйтүүнүн кошууга карата дистрибутивдик  $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ ,

коммутативдүүлүк  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$  касиеттери орун алат. Берилген

$z = x + iy$  комплекстик санына,  $\bar{z} = x - iy$  саны түйүндөш комплекстик сан деп аталып, алардын көбөйтүндүсү  $z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$  чыныгы сан болот.

**6°.**  $z_1$  жана  $z_2$  комплекстик сандарын бөлүүдөн кийинки тийинди деп,  $z_1 = z \cdot z_2$  шартын канааттандыруучу  $z$  комплекстик саны айтылат

жана  $z = \frac{z_1}{z_2}$  деп жазылат.  $\frac{z_1}{z_2}$  комплекстик санын чыныгы жана жалган

бөлүктөргө бөлүп, комплекстик санды жазуу эрежесине келтирүү үчүн, бул бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн  $\overline{z_2}$  түйүндөшүнө көбөйтөбүз:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (3)$$

Комплекстик сандарды көбөйтүүдө жана бөлүүдө

$$z \cdot 0 = 0, \quad z \cdot 1 = z, \quad \frac{z}{1} = z \quad \text{барабардыктары орун алып,} \quad \frac{z_1}{z_2} \quad \text{амалы}$$

$z_2 \neq 0$  болгон учурда гана аткарылат.

### 1.4.2 Комплекстик сандарды геометриялык сүрөттөө жана тригонометриялык формада жазуу

Ар бир  $z = x + iy$  комплекстик саны бир түгөй  $(x; y)$  чыныгы сандары аркылуу аныкталгандыктан, аны  $R^2$  мейкиндигиндеги  $Ox$  декарттык координаталар системасында жайгашкан, координаталары  $(x; y)$  болгон бир  $z$  чекити аркылуу сүрөттөөгө болот (1.4.1 - чийме). Комплекстик сандар жайгашкан координаттык тегиздикти комплекстик сандардын талаасы деп атайбыз. Комплекстик сандарды турмуштук маселелерди чечүүдө пайдалануу максатында, аларды бири – биринен айырмалап, чоңдуктар катарында салыштыруу үчүн ченөө аппараты метриканы киргизебиз. Ал үчүн эки комплекстик сандардын аралыгына маани бербей, негизги көңүлдү ар бир комплекстик сандан  $O$  башталмасына чейинки аралыкка бурабыз. Демек, комплекстик сандарды  $O$  башталмасынан чачырап алыстоосуна же жакындоосуна карата мүнөздөп, жаратылыштагы ушундай мүнөздөгү кубулуштарды изилдөөдө кеңири колдонобуз.  $R^2$  мейкиндигине киргизилген метрика боюнча  $O(o; o)$  чекитинен  $z(x; y)$  чекитине чейинки аралыкты көрсөткөн чыныгы сан  $\rho(O; z) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$  көрүнүштө эсептелет. Комплекстик сандардын көптүгү бул аралыктарды ченөө эрежесине карата метрикалык же ченелүүчү мейкиндик болот.



**1.4.2 Аныктама.**  $\rho(O, z)$  аралыгы  $z$  комплекстик санынын нормасы же модулу деп аталып,  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  көрүнүштө белгиленип, сандык мааниси аныкталат. Ал эми  $Ox$  огу менен  $Oz$  кесиндисин арасындагы оң багыттагы  $\varphi$  бурчу  $z$  комплекстик санынын аргументи деп аталып,  $\varphi = \text{Arg } z$  көрүнүштө белгиленип жазылат.  $Ox$  огуна саат стрелкасына каршы багыттагы  $\varphi$  оң, саат стрелкасы боюнча багытталган  $\varphi$  терс аргументтер болушат.

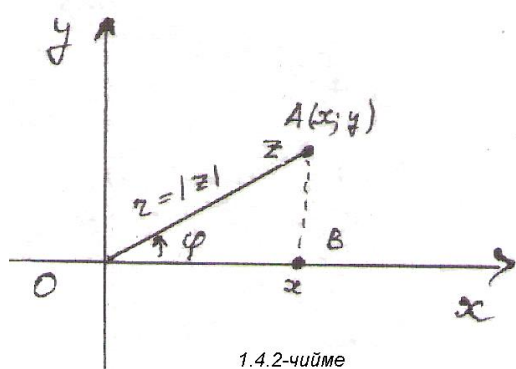
Ошентип  $z = x + iy$  комплекстик саны координаталык тегиздикте геометриялык жактан  $(x; y)$  координаталары менен эле сүрөттөлбөстөн, полярдык  $(r; \varphi)$  координаталары менен да сүрөттөлөт. Чынында эле ар бир  $z$  комплекстик санына бир гана  $r = |z|$  модулу же нормасы жана  $-\pi < \varphi \leq \pi$  аралыгында өзгөргөн бир гана  $\varphi$  аргументи туура келет. Бул аралыкта өзгөргөн бурчту аргументтин башкы мааниси  $\arg z$  деп атап, жалпы аргументтерди  $\varphi = \text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$  көрүнүштө жазабыз. Мында  $k$  бүтүн саны  $O$  полюсун айланасында толук айлануу саны болуп, бир эле  $z$  комплекстик санына санактык сандагы  $\varphi, \varphi \pm 2\pi, \varphi \pm 4\pi, \dots, \varphi \pm 2\pi k, \dots$  аргументтер туура келишет (1.4.1 - чийме). Бирок, комплекстик санды бир маанилүү аныктоо үчүн аргументтин башкы мааниси  $\arg z$  гана алынат.

Комплекстик сандын алгебралык  $z = x + iy$  белгилениши менен полярдык координаталардагы  $(r; \varphi)$  белгилөөсүн арасындагы байланышты карайбыз. 1.4.2-чиймеде көрсөтүлгөн  $\triangle AOB$  тик бурчтуу үч бурчтугун чокусу  $A(x; y)$  чекити,  $z = x + iy$  комплекстик саны болгон чекитти сүрөттөсүн жана анын модулу  $r$ , аргументи  $\varphi$  болсун. Бул учурда

$$\cos \varphi = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{x}{r} \quad \text{же} \quad x = r \cos \varphi \quad (4)$$

$$\text{жана} \quad \sin \varphi = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{y}{r} \quad \text{же} \quad y = r \sin \varphi \quad (5)$$

теңдешкен байланыштар келип чыгат.



(4), (5) барабардыктарын эки жактарын тең квадратка көтөрүп, кошуп  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , экөөсүн тең  $r$  ге бөлүп жиберип

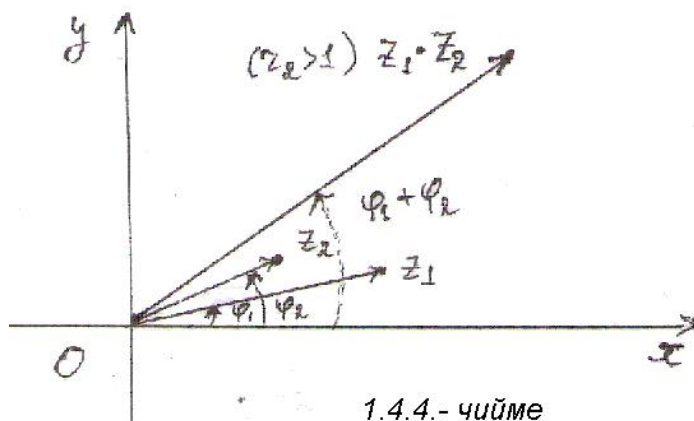
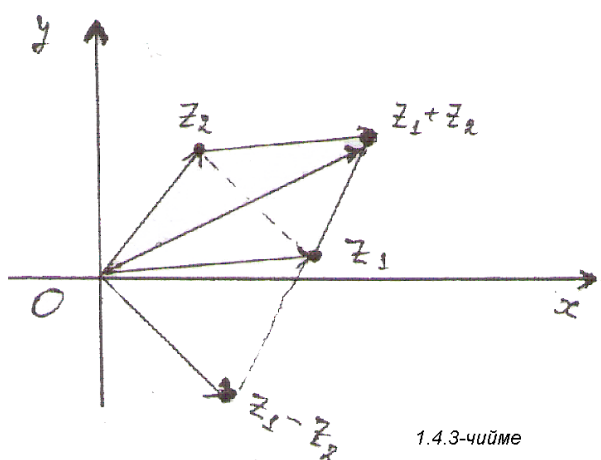
$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (6)$$

ал эми (5) ти (4) кө мүчөлөп бөлүп

жиберип,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$  же

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arg} z \quad \text{тендештиктерине}$$

(формулаларына) ээ болобуз.



Ошондой эле (4), (5) маанилерин

$z = x + iy$  ке коюп,

$$z = r \cos \varphi + i \cdot r \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (7)$$

комплексдик сандын тригонометриялык формадагы жазылышын алабыз.

Комплексдик сандарды Эйлердин  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  формуласын пайдаланып  $z = r \cdot e^{i\varphi}$  көрсөткүчтүү формада жазууга болот.

$z$  комплексдик санын  $O$  чекитинен башталып, аягы  $z = (x; y)$  чекитинде бүтүүчү вектор катарында карап, аны  $z$  чекитин радиус - вектору дейбиз. Мындай сүрөттөө менен комплексдик сандарда аткарылуучу амалдарды геометриялык жактан түшүндүрө алабыз (1.4.3-чүймө). Демек,  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  комплексдик сандарын кошуу жана кемитүү амалдары векторлорду кошуу жана кемитүү эрежелери боюнча жүргүзүлүп,  $\vec{z}_1 + \vec{z}_2$  жана  $\vec{z}_1 - \vec{z}_2$  векторлоруна туура келген чекиттер же комплексдик сандар табылат. Комплексдик сандарды тригонометриялык формада жазуу менен көбөйтүү жана бөлүү

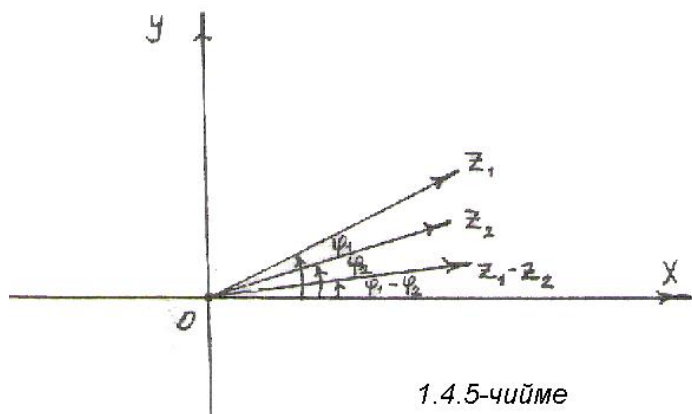
амалдарына геометриялык жактан түшүндүрмө берүүгө болот. Мисалы  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  комплекстик сандарын, оң багыттагы аргументтерин тиешелүү түрдө  $\varphi_1, \varphi_2$  жана модулдарын  $r_1 = |z_1|$ ,  $r_2 = |z_2|$  деп алалы. Бул учурда

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1)] \\ \text{же } z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 [(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)}{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} \end{aligned}$$

$$\text{же } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (9)$$

жыйынтыктарына келебиз. (8) формуласынан көрүнгөндөй  $z_1$  санын  $z_2$  комплекстик санына көбөйткөндө, анын модулу  $r_1$  саны  $r_2$  эсеге узарат ( $r_2 = |z_2| > 1$  болсо), же кыскарат ( $r_2 < 1$  болсо), ал эми  $\varphi_1$  аргументи  $\varphi_2$



бурчуна оң багытка бурулат (1.4.4 -чыйме).

(9) боюнча  $z_1$  ди  $z_2$  ге бөлгөн

кезде,  $z_1$  дин модулу  $r_1$  саны,  $\frac{1}{r_2}$  ге көбөйтүлүп,  $r_2 < 1$  болсо

узарат,  $r_2 > 1$  болсо кыскарат, ал эми  $\varphi_1$  аргументи кемип,  $\varphi_2$

бурчуна терс багытка бурулат (1.4.5 - чыйме). (8), (9) формулаларын каалагандай сандагы комплекстик сандарды көбөйтүүдө, бөлүүдө пайдалана алабыз жана бул формулалардын жардамы менен  $z$  комплекстик сандарын даражага көтөрүү, андан тамыр чыгаруу амалдарын аткаруу усулдарын келтирип чыгарабыз:

$$z^m = r^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi) \text{ же } z^m = r^m \cdot e^{im\varphi}, \quad z \neq 0. \quad (10)$$

Мындан

$$|z^m| = |z|^m = r^m, \quad \text{Arg}z^m = m\text{Arg}z = m(\varphi + 2\kappa\pi) \text{ жана}$$

$$m = \frac{1}{n} \text{ болгондо } \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} \right) \quad (11)$$

( $z \neq 0, \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1)$ ) формулалары келип чыгат. (10), (11) Муаврдын формулалары деп аталып,  $z$  комплекстик санын  $n$ -тартиптеги тамырынын ар түрдүү  $n$  мааниси болот. Алар радиусу  $R = \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{r}$ , борбору  $O$  башталмасы болгон, айлананын ичине сызылган туура  $n$  көп бурчтуктун чокуларына туура келген комплекстик сандар болушат.  $z = 0$  санын модулу  $r = 0$  болуп,  $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{0} = 0$  тамырына ээ.

Комплекстик сандарга кийинчээрек кеңири токтолсок да, математиканын башка бөлүктөрүн үйрөнүүдө керек болгон арифметикалык амалдарга байланыштуу айрым касиеттерин жаза кетели:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|, \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\left( \frac{\overline{z_1}}{z_2} \right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0), \quad \overline{(z^m)} = (\overline{z})^m, \quad z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad \overline{\overline{z}} + z = 2 \text{Re } z.$$

### Мисалдар жана көнүгүүлөр

1)  $i^5$  эсептегиле.

$$i^5 = i^4 \cdot i = (i^2)^2 \cdot i = i(-1)^2 = i$$

2)  $z = -1 - i\sqrt{3}$  комплекстик санын модулу, аргументин тапкыла жана тригонометриялык, көрсөткүчтүү формада жазгыла.

**Чыгаруу.**  $\triangleright$  Берилген  $z$  санына координаттык тегиздиктен  $(-1; -\sqrt{3})$  координаталуу, III чейректе жайгашкан чекит туура келет. Анын модулу

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \text{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

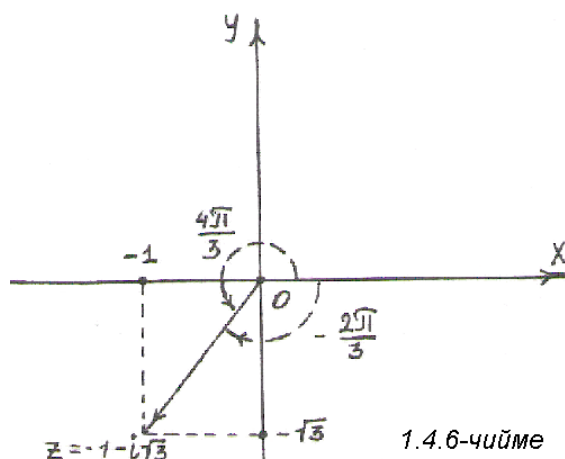
же  $\varphi = \operatorname{Arctg} \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Демек,  $\varphi = \operatorname{Arg} z = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,$

аргументтин башкы мааниси  $\arg z = \frac{4\pi}{3}$

болот (1.4.6 - чийме).

Тригонометриялык жана көрсөткүчтүү формада



$-1 - i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$  көрүнүштө жазылат. <

3) Көрсөткүчтүү формада жазылган

$e^{i2\pi}, e^{i\pi}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{-i\frac{\pi}{2}}$  комплекстик

сандарын алгебралык формада жазгыла.

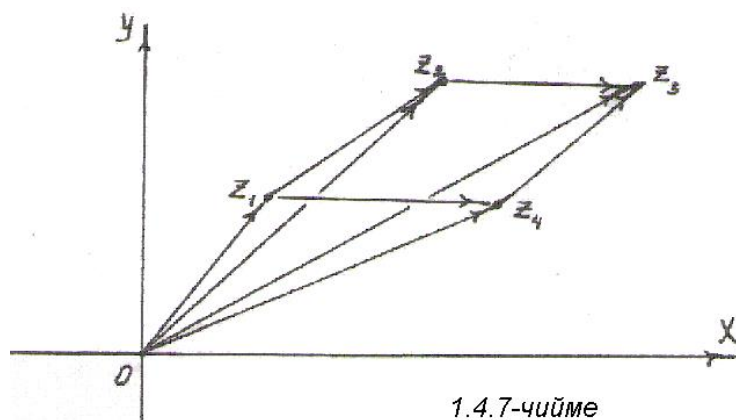
**Чыгаруу.** > Эйлердин формуласы боюнча  $e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1,$   
 $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,$

$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) = -i.$  <

4) Параллелограммдын үч чокусу

$z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2, z_3 = a_3 + ib_3$



комплекстик сандары жайгашкан чекиттер болсо,  $z_2$  чокусун карама – каршы жагында жайгашкан  $z_4 = a_4 + ib_4$  чокусун тапкыла.

**Чыгаруу:**

> Ар бир комплекстик

санды  $O$  борборунан чыккан  $\vec{Oz}_1, \vec{Oz}_2, \vec{Oz}_3, \vec{Oz}_4$  радиус векторлор деп

эсептейли (1.4.7 - чийме). Параллелограммдын карама - каршы жактары барабар болгондуктан,  $\overrightarrow{z_1 z_4} = \overrightarrow{z_2 z_3}$  же аларды  $\overrightarrow{Oz_4} - \overrightarrow{Oz_1} = \overrightarrow{Oz_3} - \overrightarrow{Oz_2}$  көрүнүштө жазып,  $\overrightarrow{Oz_4} = \overrightarrow{Oz_1} + \overrightarrow{Oz_3} - \overrightarrow{Oz_2}$  ээ болобуз. Мындан координаталары боюнча теңдештирип,  $a_4 = a_1 + a_3 - a_2$ ,  $b_4 = b_1 + b_3 - b_2$  ээ болобуз. Координаталарын аныктап,  $z_4 = (a_1 + a_3 - a_2) + i(b_1 + b_3 - b_2)$  комплекстик санын же төртүнчү чокуну аныктайбыз.  $\triangleleft$

5)  $\frac{4+5i}{3-4i}$  тийиндисин тапкыла.

**Чыгаруу.**  $\triangleright$

$$\begin{aligned} \frac{4+5i}{3-4i} &= \frac{4+5i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{12-20+15i+16i}{3^2+4^2} = \frac{-8+31i}{25} = \\ &= -\frac{8}{25} + \frac{31}{25}i \end{aligned}$$

$\triangleleft$

6)  $z = (1+i\sqrt{3})^2(1-i)^4$  комплекстик санын алгебралык формада жазгыла.

**Чыгаруу.**  $\triangleright$  Демек даражага көтөрүү жана көбөйтүү амалдарын аткаруу керек.  $z_1 = 1+i\sqrt{3}$  санын модулу  $r_1 = 2$ , аргументи

$\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ , ал эми  $z_2 = 1-i$  санын модулу  $r_2 = \sqrt{2}$ , аргументи  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$  болуп,

көрсөткүчтүү формада  $z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ ,  $z_2 = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$  көрүнүштөрдө жазылгандыктан, берилген мисал

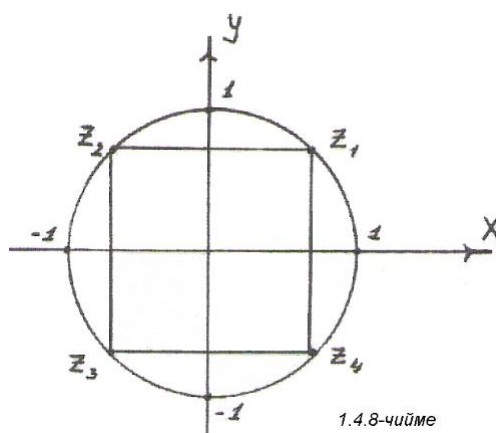
$$z = \left(2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 2^2 \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{3}} \cdot (\sqrt{2})^4 \cdot e^{-4 \cdot \frac{\pi}{4}} = 4 \cdot \sqrt{16} \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{4\pi}{4}\right)} = 16 \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\right)} =$$

$$= 16e^{-i\frac{\pi}{3}} = 16 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 16 \left( \cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3} \right) = 16 \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 8 - i8\sqrt{3}$$

алгебралык көрүнүшкө келет.  $\triangleleft$

7)  $z^4 + 1 = 0$  теңдемесин бардык чечимдерин тапкыла.

**Чыгаруу.**  $\triangleright$  Теңдемеден  $z^4 = -1$  же  $z = \sqrt[4]{-1}$  тамырын маанилерин табуу талабы келип чыгат.  $z = -1$  санын модулу  $r = 1$ , аргументи  $\varphi = \pi$ ,



тамырлардын саны  $n = 4$ . Демек  $z_1, z_2, z_3, z_4$  тамырлары Муаврдын (11)-формуласы боюнча 
$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1} \cdot \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

маанилеринде табылат:

$$k = 0 \text{ болсо, } z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k = 1 \text{ болсо, } z_2 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$k = 2$  болсо,

$$z_3 = \cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$k = 3 \text{ болсо, } z_4 = \cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Бул тамырлардын маанилери радиусу  $R = 1$ , борбору  $O$  чекитинде жайгашкан туура төрт бурчтуктун чокулары болушат (1.4.8-чийме.)  $\triangleleft$

8)  $\sqrt[3]{1}$  тамырын эсептегиле.

**Чыгаруу.**  $\triangleright$  Берилген  $z = 1$  комплекстик санынын модулу  $r = 1$ , аргументи  $\varphi = 0$  болуп, тамырдын маанилери болушкан  $z_1, z_2, z_3$  сандары, 
$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} \left( \cos \frac{0 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3} \right) = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3} \quad \text{эрежесинен}$$

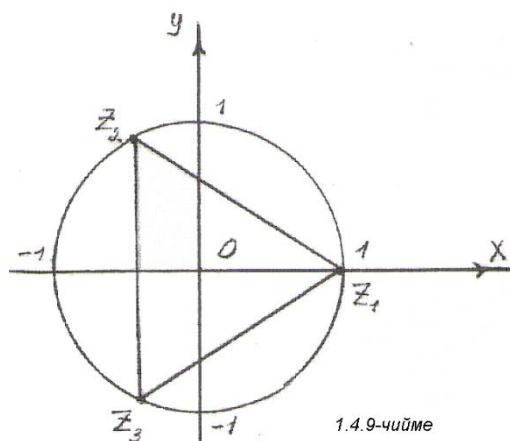
$k = 0, 1, 2$  болгондо табылышат:

$$k = 0 \text{ болсо, } z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$k = 1 \text{ болсо, } z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k = 2 \text{ болсо, } z_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ошентип  $\sqrt[3]{1}$  тамыры үч мааниге ээ болуп, алар  $R = 1$ , борбору  $O$  чекитинде болгон айланага ичтен сызылган туура үч бурчтуктун чокулары катарында сүрөттөлөт (1.4.9-чийме.)  $\triangleleft$



## Көнүгүүлөр

4.1. Төмөндөгү комплекстик сандардын чыныгы  $\operatorname{Re} z$ , жалган  $\operatorname{Im} z$  бөлүктөрүн тапкыла.

а)  $\frac{1}{1-i}$ , б)  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ , в)  $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ,

г)  $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$ , д)  $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ .

Жооптору: а)  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}$ ;

б)  $\operatorname{Re} z = 0$ ,  $\operatorname{Im} z = 1$ ; в)  $\operatorname{Re} z = -1$ ,  $\operatorname{Im} z = 0$ ;

г)  $\operatorname{Re} z = -2$ ,  $\operatorname{Im} z = \frac{3}{2}$ ; д)  $\operatorname{Re} z = 2$ ,  $\operatorname{Im} z = 0$ .

4.2. Модулдарын жана аргументтерин тапкыла жана тригонометриялык, көрсөткүчтүү формаларда жазгыла.

а)  $i$ ; б)  $-3$ ; в)  $1+i^{123}$ ; г)  $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

д)  $\frac{1-i}{1+i}$ ; е)  $(-4+3i)^3$ ; ж)  $(1+i)^8 \cdot (1-i\sqrt{3})^{-6}$ .

Жооптору: а)  $r = 1$ ,  $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

б)  $r = 3$ ,  $\operatorname{Arg} z = (2k+1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

в)  $r = \sqrt{2}$ ,  $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

г)  $r = 1$ ,  $\operatorname{Arg} z = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

д)  $r = 1$ ,  $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

е)  $r = 125$ ,  $\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{2} + 3\arctg \frac{4}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

ж)  $r = \frac{1}{4}$ ,  $\operatorname{Arg} z = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .



4.3. Төмөндөгү шарттарды канааттандырган комплекстик сандардын көптүктөрүн комплекстик тегиздиктеги жайгашуу абалына геометриялык жактан мүнөздөмө бергиле:

а)  $\operatorname{Re} z > 0$ ; б)  $\operatorname{Im} z \leq 1$ ; в)  $|\operatorname{Re} z| < 1$ ; г)  $|\operatorname{Im} z| < 1$  жана  $0 < \operatorname{Re} z < 1$  ;

д)  $|z| \leq 1$ ; е)  $|z - i| > 1$ ; ж)  $0 < |z + i| < 2$ ; з)  $1 < |z - 1| < 3$ ;

и)  $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ ; к)  $|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}$ .

4.4. Теңдемелерди чыгаргыла.

а)  $z^2 = i$ ; б)  $z^2 = 3 - 4i$ ; в)  $z^3 = -1$ ; г)  $z^6 = 64$ ;  
 д)  $z^7 + 1 = 0$ ; е)  $z^8 = 1 + i$ ; ж)  $\bar{z} = z^3$ ; з)  $|z| - z = 1 + 2i$ .

Жооптору: а)  $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ,  $z_2 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ;

б)  $z_1 = 2 - i$ ,  $z_2 = -2 + i$ ;

в)  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

г)  $z_k = 2 \left( \frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ;

д)  $z_k = e^{\frac{2k+1}{7}\pi i}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ;

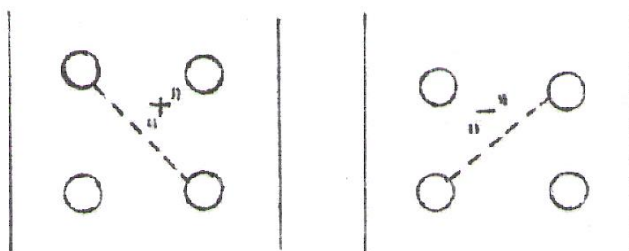
е)  $z_k = \sqrt[16]{2} e^{\frac{\pi}{4} \left( \frac{k+1}{8} \right)}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ;

ж)  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = -1$ ,  $z_4 = i$ ,  $z_5 = -i$ ; з)  $z = \frac{3}{2} - 2i$ .

## § 1.5 Сандарды аныктагыч көрүнүштө жазуу

### 1.5.1 Аныктагыч түшүнүгү

Айрым кубулуштарга байкоо жүргүзүү үчүн бир эле учурда бир канча сандардын тобун колдонуп, алардын маанисин бир чыныгы сан менен белгилөөгө туура келет. Мындай абалда колдонулуучу сан моделдерин бири аныктагыч деп аталат.



1.5.1-чийме

Айталы  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  чыныгы сандары берилсин. Анда экинчи тартиптеги аныктагыч деп,  $\Delta$  - "дельта" тамгасы менен белгиленген  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \Delta$  чыныгы санын айтабыз. Бул

аныктагычты

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (1)$$

көрүнүштө жазуу кабыл алынган. Мында  $a_{11}$  ("a - бир - бир"),  $a_{12}$  ("a - бир - эки"),  $a_{21}$  ("a - эки - бир"),  $a_{22}$  ("a - эки - эки") сандары аныктагычтын элементтери деп аталышып, экинчи тартиптеги аныктагыч эки жолчодон жана эки мамычадан турат деп эсептелет.  $a_{11}, a_{12}$  жана  $a_{21}, a_{22}$  түгөй сандары жолчолорду, ал эми  $a_{11}, a_{21}$  жана  $a_{12}, a_{22}$  түгөй сандары мамычаларды түзүшөт. Аныктагычтын элементтерин жазылышында катышкан индекстердин биринчиси жолчонун, экинчиси мамычынын ордун көрсөтөт, б.а.  $a_{21}$  - деп экинчи жолчо менен биринчи мамычанын кесилишиндеги элемент белгиленет.  $a_{11}, a_{22}$  түгөй сандары аныктагычтын оң белгидеги башкы диагонали, ал эми  $a_{12}, a_{21}$  түгөй сандары терс белгидеги башкы диагонали деп аталышып, аныктагычты эсептөөнүн (1) эрежесинде оң башкы диагоналдын элементтерин көбөйтүндүсүнөн терс башкы диагоналдын элементтерин көбөйтүндүсү кемитилет. Эсептөө эрежеси 1.5.1 - чиймедеги схемада көрсөтүлгөн.

Аныктагычтын жолчолору менен мамычаларын саны ар дайыма барабар болушуп, аныктагычтын тартибин көрсөтөт. Үчүнчү тартиптеги аныктагыч үч жолчодон жана үч мамычадан туруп,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2) \quad \text{көрүнүштө жазылат. Жалпы учурда } n -$$

тартиптеги аныктагыч  $n$  жолчодон жана  $n$  мамычадан туруп,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3)$$

↓ *j*- мамыча

*i* - жолчо ←

көрүнүштө жазылат. Ошентип аныктагыч көптөгөн элементтерден тургандыгына карабастан, бир гана  $\Delta$  чыныгы санынын аныктагыч көрүнүштө белгиленген жазылуусу болот. Аныктагычтын элементтерин жайгашуу тартиптери  $i, j$  индекстери аркылуу иреттелип,  $a_{ij}$  элементи анын  $i$  - жолчосу менен  $j$  - мамычасын кесилишинде жайгашкан элемент болот. Жазылган аныктагычтардын кандай  $\Delta$  чыныгы санын билдире турганын билүү максатында, жалпы аныктагычтардын көптүгүндө айрым амалдарды жана эреже - касиеттерди ойлоп таап киргизебиз:

**1<sup>0</sup> - эреже.** Аныктагычтын бардык жолчолорун ошол эле номердеги бардык мамычалары менен тартибин бузбай орундарын алмаштырып жазуудан, аныктагычтын сандык мааниси өзгөрбөйт:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

**2<sup>0</sup> - эреже.** Аныктагычтын каалаган эки жолчосун (же эки мамычасын) орундарын алмаштырып жазууда анын сандык мааниси карама - каршы белгиге өзгөрөт:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = -\Delta .$$

**3<sup>0</sup> - эреже.** Аныктагычтын кайсы бир жолчосун (мамычасын) бардык элементтерин жалпы көбөйтүүчүсүн аныктагычтын сыртына чыгарып, аныктагычка көбөйтүндү катарында эсептөөгө болот:

$$\begin{vmatrix} k a_{11} & k a_{12} & k a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & k a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & k a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & k a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \Delta .$$

**4<sup>0</sup> - эреже.** Эгерде аныктагычтын эки жолчосундагы (эки мамычасындагы) тиешелеш элементтер окшош (же бирдей) сандар болушса, анда аныктагычтын сандык мааниси нөлгө барабар болот.

**5<sup>0</sup> - эреже.** Эгерде аныктагычтын кайсы бир жолчосу (мамычасы) жалаң нөл элементтеринен гана турса, анда аныктагычтын сандык мааниси нөлгө барабар болот.

**6<sup>0</sup> - эреже.** Эгерде аныктагычтын эки жолчосун (эки мамычасын) тиешелүү элементтери пропорциялаш болушса, анда аныктагычтын сандык мааниси нөлгө барабар. Бул учурда, мындай жолчолор (мамычалар) бири - биринин сызыктуу комбинациялары болушат.

**7<sup>0</sup> - эреже.** Эгерде аныктагычтын кайсы бир жолчосун (мамычасын) бардык элементтерин эки кошулуучулардын суммасына ажыратып жазууга мүмкүн болсо, анда берилген аныктагычты эки аныктагычтын суммасы көрүнүштө жазууга мүмкүн. Бул аныктагычтар бир жолчосу (мамычасы) менен гана айырмаланышат, б.а. биринчи аныктагычтын сөз кылынган жолчосунда (мамычасында) биринчи кошулуучулар, ал эми экинчи аныктагычтын сөз кылынган жолчосунда (мамычасында) экинчи кошулуучулар жайгашып, калган жолчолордо (мамычаларда) элементтер өзгөрүүсүз кала берет.

**Мисалы:**

$$c + d - 5(a + b) = \begin{vmatrix} 1 & a + b \\ 5 & c + d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 5 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b \\ 5 & d \end{vmatrix} = c - 5a + d - 5b = c + d - 5(a + b)$$

эки аныктагычтын суммасы катарында жазылат.

**8<sup>0</sup> - эреже.** Аныктагычтын кайсы бир жолчосун (мамычасын) элементтерине экинчи бир жолчонун (мамычанын) тиешелүү элементтерин  $\lambda$  санына ( $\lambda \neq 0$ ) көбөйтүп, кошуп жазуудан аныктагычтын сандык мааниси өзгөрбөйт.

## 1.5.2 Аныктагычты эсептөө эрежелери

Аныктагыч да сандар сыяктуу эле формалдуу символ-тамга болуп, кайсы бир сандын кыялыбызда ойлоп табылган белгилениши болот. Ал эми жогоруда өзүбүз ойлоп киргизген жасалма эреже - касиеттерге таянып, анын сандык маанисин табууну, аныктагычты эсептөө эрежеси деп түшүнөбүз, Экинчи тартиптеги аныктагычты эсептөө эрежеси (1) формуласы менен аныкталып, ал жалпы  $n$  - тартиптеги аныктагычтарды

эсептөө же сандык маанисин табуу эрежесине жалпыланат. Аныктагыч көрүнүштөгү сандын моделин түзүүдө, анын элементтерин индекстериндеги бир маанилүү инверсиялардын санына жараша, аныктагычтын сандык маанисин аныктоо эрежеси же амалы кошо ойлонулган (V-гл., §5.1). Бул эрежеге ылайык, ар бир аныктагычка бир гана чыныгы сан тиешелеш коюлат жана тескерисинче. Ал үчүн аныктагычтын элементин минору жана алгебралык толуктоочу деген түшүнүктөрдү киргизебиз.

**1.5.1 Аныктама.**  $\Delta$  аныктагычын  $a_{ij}$  элементинин  $M_{ij}$  минору деп, берилген  $\Delta$  аныктагычынан  $i$  - жолчосу менен  $j$  - мамычасы сызып салгандан кийин келип чыккан аныктагычты айтабыз.

Ошентип  $M_{ij}$  минору берилген  $\Delta$  аныктагычына караганда бир жолчого жана мамычага кемип,  $\Delta$  аныктагычына караганда тартиби бирге төмөндөгөн аныктагыч болот.

**Мисалы:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} \text{ үчүнчү тартиптеги аныктагычтын } a_{21} = -1 \text{ элементин}$$

минору  $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$  экинчи тартиптеги аныктагыч же 4 саны болот.

**1.5.2 Аныктама.**  $\Delta$  аныктагычынын  $a_{ij}$  элементин алгебралык толуктоочу  $A_{ij}$  деп,  $i+j$  саны жуп болсо  $M_{ij}$  минорун өзүн, ал эми так болсо “ $-M_{ij}$ ” минорун айтабыз, б.а.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (4)$$

болот.

Жогорудагы мисалдагы аныктагычтын  $a_{21} = -1$  элементин алгебралык толуктоочу  $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$  сандык маанисине ээ болгон экинчи тартиптеги аныктагыч болот. (4) теңдештигинен көрүнгөндөй  $M_{ij}$  минору менен  $A_{ij}$  алгебралык толуктоочу барабар болгон же белгилеринен гана айырмаланган аныктагычтар (сандар) болушат. Алгебралык толуктоочторго байланышкан дагы бир эреже - касиетти жазалы:

**9<sup>0</sup>- эреже.** Аныктагычтын кайсы бир жолчосун (мамчыасын) элементтерин башка бир жолчосунун (мамчыасынын) тиешелүү элементтерин алгебралык толуктоочторуна көбөйтүп суммалоонун натыйжасы нөлгө барабар болот.

Бул эрежени үчүнчү тартиптеги аныктагычка текшерип көрөлү. Аныктагычтын биринчи жолчосун элементтерине үчүнчү жолчосун тиешелүү элементтерин алгебралык толуктоочторун көбөйтүп суммалаганда

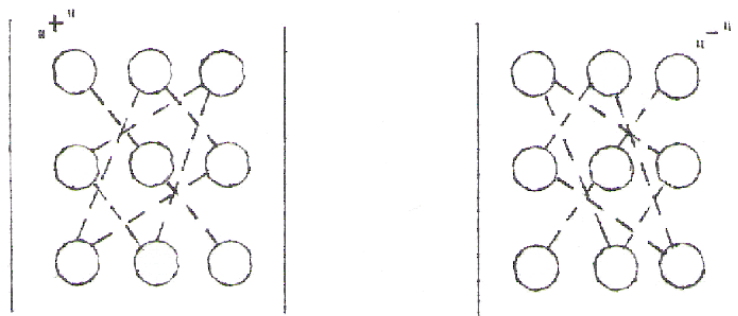
$$\begin{aligned} a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} &= a_{11}(-1)^{3+1}M_{31} + a_{12}(-1)^{3+2}M_{32} + a_{13}(-1)^{3+3}M_{33} = \\ &= a_{11}M_{31} - a_{12}M_{32} + a_{13}M_{33} = \\ &= a_{11}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) - a_{12}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) + a_{13}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \\ &= a_{11}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{11}a_{23} + \\ &+ a_{12}a_{21}a_{13} + a_{13}a_{11}a_{22} - a_{13}a_{21}a_{12} = 0 \end{aligned}$$

келип чыгып, 9<sup>0</sup> - эреженин аткарыларына ишенебиз.

**1.5.3 Аныктама.** Аныктагычты эсептөө эрежесин, аныктагычтын каалагандай бир жолчосунун (мамчыасынын) элементтерин, өздөрүнүн алгебралык толуктоочторуна көбөйтүп суммалоо амалы катарында кабыл алып, аны аныктагычты жолчосу (мамчыасы) боюнча ажыратуу деп атайбыз.

Бул эсептөө эрежеси боюнча, аныктагыч кайсыл жолчо (мамчы) менен ажыратылганына карабай, бир эле сандык натыйжага ээ болот. Үчүнчү тартиптеги аныктагычты биринчи жолчосун элементтерин алгебралык толуктоочтору боюнча ажыратып көрөлү:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = (-1)^{1+1}a_{11}M_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}M_{12} + \\ &+ (-1)^{1+3}a_{13}M_{13} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{31}a_{23}) + \\ &+ a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - \\ &- a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}. \end{aligned} \tag{5}$$



1.5.2-чийме

Бул ажыралышты байкап көрүп, аны эстеп калуунун жөнөкөй ыкмасын табабыз.

Оң белгидеги кошулуучулар оң башкы диагоналдын жана анын капталында жайгашкан

үч элементтердин көбөйтүндүлөрүнөн турушат, ал эми терс белгидеги кошулуучулар терс башкы диагоналдын жана анын капталындагы үч элементтердин көбөйтүндүлөрүнөн турушат. Ошентип экинчи жана үчүнчү тартиптеги аныктагычтарды алгебралык толуктоочтору аркылуу ажыратып эсептебестен, (1), (5) эрежелери аркылуу (1.5.1), (1.5.2) - чиймелерде көрсөтүлгөн “+”, “-” диагоналдарындагы байланыштарга карап, элементтерин көбөйтүп суммалоо менен эсептөөгө болот. Үчүнчү тартиптеги аныктагычты 1.5.2 - чиймедеги схема менен эсептөөнү Сарриустун эрежеси деп атап,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} \quad (6)$$

көрүнүштө эстеп калабыз. Албетте үчүнчү тартиптеги аныктагычты кайсы жолчосун же мамычасын элементтерин алгебралык толуктоочтору менен ажыратсак да, (6) Сарриустун эрежеси келип чыгат, анткени ар бир аныктагыч бир гана сандык мааниге ээ болот.

Жалпы  $n$  - тартиптеги аныктагычты биринчи жолчонун элементтерин алгебралык толуктоочтору аркылуу ажыратуу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j}M_{1j} \quad (7)$$

көрүнүшүндө,  $i$  - жолчосун элементтерин алгебралык толуктоочтору аркылуу ажыратуу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad (8)$$

$j$  - мамычасынын элементтери аркылуу ажыратуу

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad (9)$$

көрүнүштөрдө болуп, иш жүзүндө бир гана  $\Delta$  сандык маанисине ээ болушат.

Эгерде аныктагычтын бардык элементтери нөлдөр болсо, нөл - аныктагыч деп аталып, сандык мааниси нөлгө тең болот. Аныктагычтын башкы оң диагоналдында жалаң гана “1” элементтери туруп, калган бардык элементтери жалаң нөлдөр болсо, анда аны бирдик аныктагыч деп  $E$  тамгасы менен белгилейбиз. Каалаган тартиптеги бирдик аныктагычтын сандык мааниси бирге барабар болорун (8), (9) эсептөө эрежелеринен көрүүгө болот

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Жалпы  $n$ -тартиптеги аныктагычтарды минорлордун жардамы менен тартибин төмөндөтүп олтуруп, эсептөөнүн (8), (9) ыкмаларын жеңилдетүүгө болот. Ал үчүн аныктагычтын  $1^0 - 9^0$  эреже – касиеттерин пайдаланып, аны үч бурчтук формасына келтирүү керек. Бул учурда аныктагычтын башкы оң диагоналдан төмөн турган бардык элементтер нөл болгондой өзгөртүлүп түзүлөт. Бул элементтер минорлоруна көбөйтүлгөндө нөл саны келип чыгып, (8), (9) суммаларын эсептөө жеңилдейт. Айрым учурларда, кээ бир жолчолордун же мамычалардын бир элементинен башка элементтерин баары нөлдөр болгондой теңдеш өзгөртүүлөр жүргүзүлөт.

**Мисалы:**



$$1) \triangleright \Delta = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{аныктагычын биринчи жолчосун}$$

элементтеринен үчүнчү жолчонун элементтерин 2 ге көбөйтүп кемитип, ал эми экинчи жолчонун элементтерине үчүнчү жолчонун элементтерин 2 ге көбөйтүп кошуу менен жазсак, берилген аныктагычтын сандык мааниси өзгөрбөй,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{көрүнүшкө келет. Аны биринчи мамычанын}$$

элементтерин минорлору боюнча ажыратканда  $a_{31} = 4, a_{11} = a_{21} = a_{41} = 0$

болгондуктан, 
$$\Delta = (-1)^{1+3} a_{31} M_{31} = (-1)^{1+3} 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 10 & 15 & 20 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{аныктагычына}$$

өзгөрөт. Өзгөртүлгөн аныктагычтын биринчи мамычасын бир элементинен башкасын нөлдөргө өзгөртүп түзөлү. Ал үчүн биринчи жолчону өзүндөй калтырып, экинчи жолчого 10 го көбөйтүлгөн биринчи жолчону кошуп жазып, үчүнчү жолчого 4 кө көбөйтүлгөн биринчи жолчону кошуп жазып,

$$\Delta = (-1)^4 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 0 & -45 & 20 \\ 0 & -27 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{аныктагычын алабыз. Аны биринчи}$$

мамычанын минору боюнча ажыратып ( $a_{11} = -1, a_{21} = a_{31} = 0$  эске алынат),

$$\Delta = 4 \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} -45 & 20 \\ -27 & 2 \end{vmatrix} = -4(-45 \cdot 2 + 27 \cdot 20) = -1800 \quad \text{санына ээ}$$

болобуз. <

2) Аныктагычты үч бурчтук формасына келтирүү менен эсептегиле:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

**Чыгаруу:** ▷ Биринчи жолчону өзүндөй калтырып, калган жолчолордон биринчини кемитип жазалы, анда

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

аныктагычына ээ болобуз. Аны биринчи мамыча боюнча ажыратып  $a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0$ ,  $a_{11} = 1$  болгондуктан,  $\Delta_1 = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11}$  миноруна, андан соң тартиби төмөндөгөн  $M_{11}$  аныктагычын (минорун) да биринчи мамычасы боюнча ажыратып,

$$\Delta_1 = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (4 - 0) = -8 \quad \text{санына}$$

ээ болобуз.

Айрым учурларда жогорку тартиптеги аныктагычты ага окшош көрүнүштөгү тартиби бир топ төмөн аныктагычтын сандык маанисине окшоштуруп, салыштыруу менен эсептөөгө болот. Окшош көрүнүштөгү аныктагычтарды эсептөөдөгү байланыш формуласы рекурренттик формула менен берилип, анын чындыгы математикалык индукция методу менен текшерилет.

Экинчи жана үчүнчү тартиптеги аныктагычтар (1) жана (6) эрежелери менен эсептелип, тартиби төрттөн жогорку болгон аныктагычтарды (8), (9) эрежелери менен жолчолордун же мамычалардын элементтерин минорлору боюнча ажыратуу аркылуу эсептейбиз. Ажыратуудан кийин пайда болгон минорлордо баштапкы аныктагычка караганда бирден жолчо жана мамыча кемигендиктен, алардын тартиби бирге төмөндөйт. Эгерде келип чыккан минорлор үчүнчү тартипте болсо, анда аларды Сарриустун эрежеси боюнча эсептеп, берилген аныктагычтын сандык маанисин табабыз. Эгерде минорлордун тартиби төрттөн жогору болсо, анда ар бир минорду өзүнчө аныктагыч катарында жазып, аны да минорлору боюнча ажыратабыз. Ошентип бул процессти ажыратылган минорлор үчүнчү тартипке келгенге чейин уланта беребиз.

Аныктагычтардын сандык маанилерин эсептөөнүн (1), (6), (7), (8), (9) эрежелери аныктагычтардын  $1^0 - 9^0$  эреже – касиеттерине баш ийишет, б.а. канааттандырышат. Элементтери комплекстик сандар болгон аныктагычтар үчүн да ушул эле эсептөө эрежелери колдонулат.

#### 4. Мисалдар жана көнүгүүлөр

$$1. \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \text{ аныктагычтын сандык маанисин эсептеп } 1^0, 2^0, 3^0$$

$^0$  эрежелерин тууралыгын текшергиле.

**Текшерүү.** ▷

1) Берилген аныктагычтын маанисин Сарриустун (6) формуласы боюнча табабыз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 0 \cdot (-1) \cdot 2 =$$

$$= 4 + 0 - 6 - 3 + 4 - 0 = -1.$$

2)  $1^0$ - эреженин туура экендигин текшерүү үчүн берилген аныктагычтын бардык жолчолору менен мамычаларын орундарын алмаштырып эсептеп көрөлү:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 0 \cdot (-1) \cdot 2 =$$

$$= 4 - 6 + 0 - 3 + 4 - 0 = -1.$$

Демек  $\Delta = \Delta_1 = -1$  болуп,  $1^0$ - эреже сакталат.

3)  $2^0$ - эреженин туура экендигин текшерүү үчүн берилген аныктагычтын экинчи жана үчүнчү жолчолорун алмаштырып жазып, эсептейли:

4)

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot (2) + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 =$$

$$= -4 + 3 + 0 - 0 - 4 + 6 = 1.$$

Демек,  $\Delta = -1$ ,  $\Delta_2 = 1$  болуп, аныктагычтын сандык мааниси белгисин каршы белгиге өзгөрткөн.

5)  $3^0$  - эрежени текшерүү үчүн берилген аныктагычтын экинчи мамычасын бардык элементтерин 4 санына көбөйтүп жазып эсептейли:

$$4 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 2 & (-1) \cdot 4 & 1 \\ 0 & 1 \cdot 4 & 2 \\ 3 & (-1) \cdot 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) \cdot 1 + (-4) \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 0 \cdot (-4) \cdot 2 -$$

$$- (-4) \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 0 - 24 - 12 - 0 + 16 = -4.$$

Чынында эле берилген аныктагычтын  $\Delta = -1$  мааниси 4 санына көбөйтүлгөн. <

**2.** Сарриустун эсептөө эрежесин пайдаланып, үчүнчү тартиптеги аныктагычтарга  $4^0$ ,  $5^0$ ,  $6^0$  - эрежелердин аткарыларын текшергиле.

**Текшерүү:**  $\triangleright 1$ ).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 5 - 0 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot 2 =$$

$$= 24 + 0 + 15 - 0 - 15 - 24 = 0.$$

Демек, эки жолчосу бирдей элементтерден турган аныктагычтын сандык мааниси нөлгө барабар болду. Ушундай эле эсептөө менен каалагандай эки жолчосу же мамычасы окшош элементтерден турган аныктагычтын сандык мааниси нөлгө барабар болорун текшерип көрө алабыз.

2).

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 4 \cdot (-2) =$$

$$= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0.$$

Экинчи мамычасы жалаң нөл элементтеринен турган аныктагычтын сандык мааниси нөлгө барабар болуп,  $5^0$ - эреже аткарылат.

3).

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 12 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \cdot 1 & 1 \\ 1 & 3 \cdot 4 & 4 \\ 0 & 3 \cdot 2 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{(5^0\text{-эреже})}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 4 -$$

$$- 0 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2) = 3 \cdot (16 + 2 + 0 - 0 - 16 - 2) \stackrel{(4^0\text{-эреже})}{=} 3 \cdot 0 = 0.$$

Ошентип  $6^0$ - эрежедеги абал орун алып, экинчи жана үчүнчү мамычалардын элементтери пропорциялаш (окшош) болуп турат. Пропорциялуулук коэффициенти болгон 3 көбөйтүндүсүн  $3^0$ - эреже боюнча аныктагычка көбөйтүндү катарында чыгарып жазууга болот. Келип чыккан аныктагычтын экинчи жана үчүнчү мамычаларын элементтери бирдей болуп калгандыктан,  $4^0$ - эреже боюнча анын сандык мааниси нөлгө барабар болот. <

3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -14 \text{ аныктагычы үчүн}$$

$8^0, 9^0$ - эреже - касиеттердин аткарылуусун текшерип көргүлө.

**Текшерүү:**  $\triangleright$   $8^0$ - эрежесин текшерүү үчүн экинчи жолчонун элементтерине  $\lambda = 2$  санына көбөйтүлгөн биринчи жолчонун тиешелүү элементтерин кошуп жазып эсептейли:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 15 + 3 = -14. \text{ Демек, берилген аныктагычтын}$$

сандык мааниси өзгөргөн жок.

9<sup>0</sup>- эрежени текшерүү үчүн биринчи жолчонун элементтерин экинчи жолчонун тиешелүү элементтерин алгебралык толуктоочторуна көбөйтүп, суммалайбыз.

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = a_{11} \cdot (-1)^{2+1} M_{21} + a_{12} \cdot (-1)^{2+2} M_{22} + a_{13} \cdot (-1)^{2+3} \cdot M_{23} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = +1 - 1 = 0$$

Демек, 9<sup>0</sup>- эреже берилген аныктагыч үчүн аткарылат. <

4.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{төртүнчү} \quad \text{тартиптеги} \quad \text{аныктагычын}$$

эсептегиле.

**Эсептөө:** ▷ Аныктагычты үчүнчү жолчосун элементтерин алгебралык толуктоочтору боюнча ажыратып жазалы. (8) - формулада  $i = 3$  болуп,

$$\Delta = \sum_{j=1}^4 a_{3j} A_{3j} = \sum_{j=1}^4 (-1)^{3+j} a_{3j} M_{3j} = (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot M_{31} + (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot M_{32} +$$

$$+ (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot M_{33} + (-1)^{3+4} \cdot (-3) \cdot M_{34} = -2 \cdot M_{32} + M_{33} + 3 \cdot M_{34} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 9 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 8 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 9 \end{vmatrix} = -2 [ 3 \cdot 0 \cdot 8 + 5 \cdot 9 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 6 - 6 \cdot 0 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 9 \cdot 1 ] +$$

$$+ 3 \cdot 2 \cdot 8 + 5 \cdot (-2) \cdot 2 + 6 \cdot (-1) \cdot (1) - 6 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) \cdot 1 - 5 \cdot (-1) \cdot 8 + 3 [ 3 \cdot 2 \cdot 9 + (-1) \cdot 0 \cdot 6 +$$

$$+ 5 \cdot (-2) \cdot 4 - 6 \cdot 2 \cdot 4 - (-2) \cdot 0 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) \cdot 9 ] = -2(90 + 24 - 160 - 27) + 48 - 20 - 6 - 24 + 6 +$$

$$+ 40 + 3(54 - 40 - 48 + 45) = 146 + 44 + 33 = 223$$

келип чыгат. <

5.

$$\begin{vmatrix} z & 2-3i \\ 1 & i \end{vmatrix} = -1+i \text{ теңдемесин } z = x+iy \text{ КОМПЛЕКСТИК санына}$$

карата чыгаргыла.

**Чыгаруу.**  $\triangleright$  Аныктагычты эсептеп,

$zi - 1 \cdot (2 - 3i) = -1 + i$  теңдештигин алабыз. Ага  $z = x + iy$  маанисин койгондон кийин

$$\begin{aligned} i(x+iy) - 2 + 3i &= -1 + i, \\ ix - y - 2 + 3i &= -1 + i \end{aligned} \Rightarrow ix - y = 1 - 2i \text{ же } \begin{cases} x = -2, \\ y = -1 \end{cases} \text{ келип чыгат.}$$

Жообу:  $z = -2 - i$ .

### Көнүгүүлөр

Аныктагычтарды эсептегиле:

$$5.1. \begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}, \quad (\text{Жообу: } (a-b)^2.)$$

$$5.2. \begin{vmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{vmatrix}, \quad (\text{Жообу: } 0.)$$

$$5.3. \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}, \quad (\text{Жообу: } 4ab.)$$

5.4. Теңдемени чыгаргыла:

$$a) \begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{Жообу: } x_1 = -4, x_2 = -1).$$

$$б) \begin{vmatrix} \cos x & -\sin 5x \\ \sin \alpha x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{Жообу: } x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z).$$

$$в) \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{Жообу: } x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{22}).$$

5.5. Аныктагычтарды эсептегиле

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad (\text{Жообу: } 0), \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}, \quad (\text{Жообу: } 0).$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix},$$

(Жообу:  $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha)$ ),

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix}, \quad (\text{Жообу: } 41). \quad \text{д) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix},$$

(Жообу: 0).



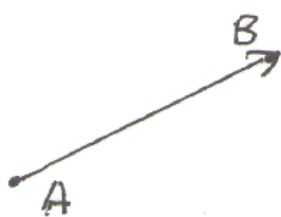
## II ГЛАВА. ВЕКТОРДУК АЛГЕБРАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

### § 2.1 Векторлор жана алардын мейкиндиктеги сүрөттөлүшү

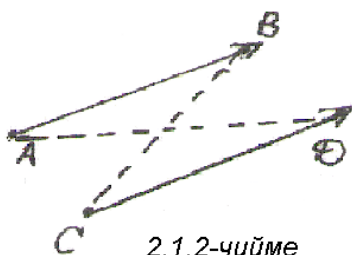
#### 2.1.1 Вектор түшүнүгү

Жаратылыш чөйрөсүндөгү чоңдуктар менен кубулуштарды математикалык тилде моделдештирип жазууда, аардын скалярдык же вектордук экендигине көңүл бурабыз. Скалярдык чоңдук деп сандык мааниси боюнча толук мүнөздөөгө мүмкүн болгон чоңдуктарды түшүнөбүз. Мисалы аралык, аянт, көлөм, масса скалярдык чоңдуктар болушат, анткени аларды сандык мааниси боюнча эле толук таанып билүүгө болот. Вектордук чоңдуктар деп сандык маанилери боюнча толук таанып үйрөнүүгө мүмкүн болбой, алардын өзгөрүү багыттарын билгенден кийин гана толук таанууга болгон чоңдуктарды айтабыз. Мисалы күч, ылдамдык, ылдамдануу, басым вектордук чоңдуктар болушуп, аларды толук мүнөздөө үчүн сандык мааниси менен катар, аракеттенүү багытын да билүүгө туура келет. Ошондуктан математикалык тилге багыттарды эске алган жаңы символ-тамга киргизип, аны вектор деп атайбыз.

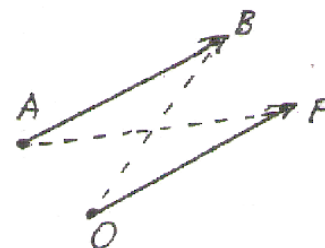
$R^2$  тегиздигинен эки  $A$  жана  $B$  чекиттерин алып, аларды  $AB$  кесиндиси менен туташтыралы.  $A$  чекитин кесиндин башталуу,  $B$  чекитин кесиндин бүтүүчү учтары десек, анда  $A$  чекитинен  $B$  чектине карай багыталган  $AB$  кесиндиси түзүлөт. Бул багытталган кесиндини  $\overrightarrow{AB}$  вектору деп айтабыз. Мындай башталуу жана бүтүүчү учтары белгилүү болгон векторлорду «**козголбос векторлор**» деп атап, башталуучу жана бүтүүчү чекиттерин көрсөтүп чийебиз жана жазабыз:  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $\overrightarrow{MN}$  ж.б.у.с. (2.1.1-чийме).



2.1.1-чийме



2.1.2-чийме



2.1.3-чийме

Козголбос векторлорду өз ара салыштырууда жана айрым практикалык колдонууда төмөндөгүдөй эрежелерди сактайбыз:

1<sup>o</sup> . Вектордун башталуу жана бүтүү чекиттери дал келишсе  $A \equiv B$ , аны «нөлдүк вектор» деп, « $\vec{0}$ » символу менен белгилейбиз. А чекитинен В чекитине чейинки аралык  $|AB|=1$  бир санына барабар болсо, аны «бирдик вектор» дейбиз. Бирдик векторлорду көбүнчө  $\vec{e}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{a}_0$  ж.б. тамгалар менен белгилейбиз:

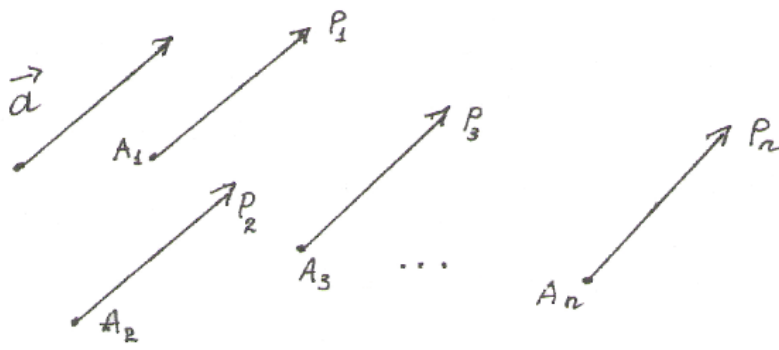
$$|\vec{e}| = |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = |\vec{a}_0| = 1.$$

2<sup>o</sup> . Эки  $\overrightarrow{AB}$  жана  $\overrightarrow{CD}$  векторлорун байланыштырган  $AD$  жана  $CD$  кесиндилеринин кесилишүү чекити алардын тең ортолору менен дал келсе (2.1.2-чийме), анда  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  векторлору барабар деп аталышат  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

3<sup>o</sup> . Тегиздикте жайгашкан каалагандай  $O$  чекитинен берилген  $\overrightarrow{AB}$  козголбос векторуна барабар болгон бир гана  $\overrightarrow{OP}$  векторун курууга болот (2.1.3-чийме).

Акыркы амалды  $\overrightarrow{AB}$  векторун  $O$  чекитине параллель которуу деп, анын жардамы менен козголбос векторго кыймыл берип, аны таанып үйрөнүүгө ыңгайлуу чекитке жылдырып келебиз.  $\overrightarrow{AB}$  векторун  $O$  чекитине параллель которуу үчүн,  $OB$  кесиндисинин тең ортосу менен кесилишкенде тең экиге бөлүнүүчү  $AP$  кесиндисин учу болгон  $P$  чекитин табуу керек (2.1.3-чийме). Эгерде ушундай бир гана  $P$  чекити табылса, анда  $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{OP}$  же  $\overrightarrow{AB}$  векторуна теңдеш болгон  $\overrightarrow{OP}$  вектору  $O$  чекитине параллель которулду (курулду) деп эсептейбиз.

Акыркы 3<sup>o</sup> - эрежеден байкагандай тегиздиктеги каалагандай чекитке, кайсы бир эркин багыттагы векторду которуп курсак, анда аны кандайдыр бир козголбос вектордун өзүндөй болгон элеси десек болот. Ошондуктан ар бир козголбос векторду, кайсы бир жерге которулуп курулган эркин вектор деп эсептеп, жалпы учурда векторлорду башталуу жана бүтүү чекиттерин көрсөтпөй эле кичине тамгалар менен белгилеп,



2.1.4-чийме

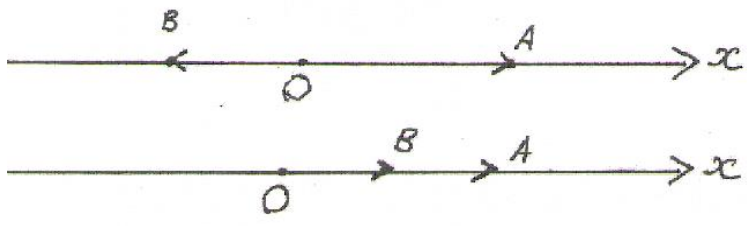
эркин вектор катарында жазабыз:  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \dots$  ж.б.у.с. Мындан ары атайын эскертүүсүз берилген векторду эркин вектор деп түшүнөбүз. Ошентип эркин  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  векторун тегиздиктин

каалагандай бир чекитине бир гана жолу параллель которуу жолу менен кура алабыз. Мисалы, тегиздиктеги ар башка  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  чекиттерине параллель которуу үчүн,  $Z^0$ -эрежени сактоо менен ар бир  $A_i$  чекитине ылайык бир гана  $P_i$  чекитин табабыз ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ). Натыйжада  $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1P_1} = \overrightarrow{A_2P_2} = \dots = \overrightarrow{A_nP_n}$  параллель которулган өз ара барабар векторлордун тобуна ээ болобуз (2.1.4-чийме). Бардык векторлордун көптүгүндөгү айрым векторлор тобунун окшош жалпылыктарына карап, аларга коллинеардуу, компланардуу векторлор деген аттарды беребиз:

- I. Бир түздө же өз ара параллель түздөрдө жайгашкан векторлордун тобу коллинеардуу векторлор деп аталышат.
- II. Бир тегиздикте же өз ара параллель тегиздиктерде жайланышкан үч вектор же андан көп векторлордун тобу компланардуу векторлор деп аталышат.
- III. Эки  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$  коллинеардуу векторлорун сан огундагы бир O чекитине курсак, анда алар бир Ox түзүндө (сан огунда) жайгашып калышат. Бул учурда алар O чекитин бир тарабында же эки тарабында жайгашып калышы мүмкүн (2.1.5-чийме).

Биринчи учурда  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$  векторлорун багытташ векторлор, экинчи учурда карама – каршы багыттагы векторлор деп атайбыз.

Багыттары дал келип, узундуктары барабар болгон векторлорду барабар векторлор дейбиз.



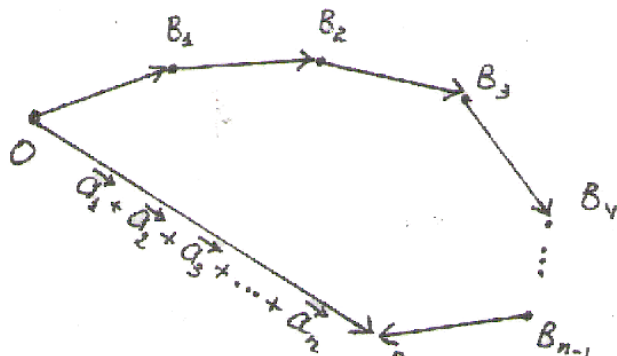
2.1.5-чийме

Жалпы учурда коллинеардуу векторлорду параллель  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  деп эсептейбиз.  $\vec{a}$  векторуна

карама - каршы векторду " $-\vec{a}$ " деп белгилейбиз. Сандык октун багыты оң деп алынат.

## 2.1.2 Векторлор менен аткарылуучу сызыктуу амалдар

Жаратылыш кубулуштарын математикалык тилде



2.1.6-чийме

моделдештирип үйрөнүүдө векторлор көптүгүн пайдалануу үчүн, алар менен жүргүзүлүүчү амалдарды жана аларды аткаруу эрежелерин киргизебиз. Сызыктуу амалдар деп векторлорду кошуу, кемитүү жана санга көбөйтүү амалдарын түшүнөбүз:

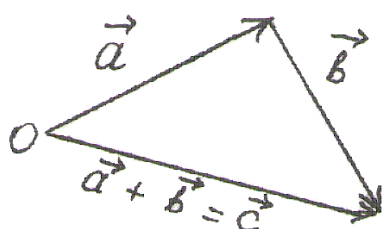
### I. Векторлорду кошуу жана кемитүү.

Тегиздикте эркин жайгашкан  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$  (1)

векторлору берилсин. Алардын ар бирин каалагандай бир чекитке параллель которуу менен бир гана жолу курууга болгондуктан, эркин тандалган  $O$  башталуу чекитине  $\vec{a}_1$  векторун куралы.  $\vec{a}_1$  векторун бүтүүчү учу  $B_1$  чекитине  $\vec{a}_2$  векторун куруп,  $\vec{a}_2$  нин бүтүүчү учу  $B_2$  чекитине  $\vec{a}_3$  векторун куруу менен ушул процессти улантсак, акырында  $\vec{a}_{n-1}$  векторун бүтүүчү учу  $B_{n-1}$  чекитине  $\vec{a}_n$  вектору курулган болот. Натыйжада (1) векторлор тобун бири – бирине улаштырылган абалда жайгаштырган болобуз (2.1.6-чийме).

**2.1.1 Аныктама.** Берилген  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  векторлорун суммасы деп, бул векторлорду улаштыруу жолу боюнча кыймылдап келген чекиттин баштапкы жана акыркы абалдарын туташтырган векторду айтабыз.

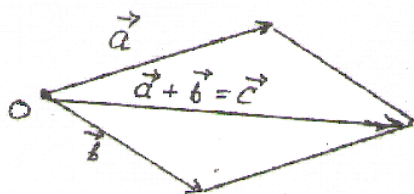
Векторлордун суммасы да вектор болуп,  $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$  көрүнүштө жазылат.



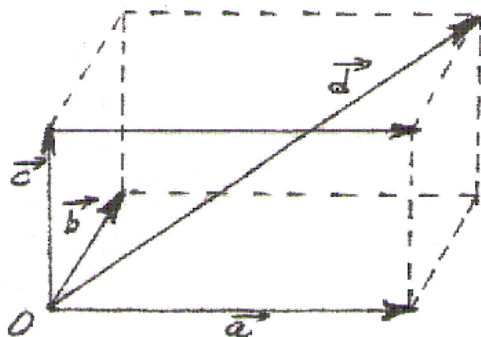
2.1.7-чийме

Эгерде чекиттин кыймылы баштапкы абалга келип токтосо, анда суммасы  $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \vec{0}$  нөл вектор болот.

Жогорудагы аныктамадан эки  $\vec{a}, \vec{b}$  векторлорун кошуунун (2.1.7-чыйме) үч бурчтук эрежеси келип чыгат. Эгерде  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  деп белгилесек,  $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$  кемитүүнүн үч бурчтук эрежесине ээ болобуз (2.1.7-чыйме). Векторлорду кошуунун параллелограмм эрежеси да үч бурчтук эрежесинен келип чыгат (2.1.8-чыйме).



2.1.8-чыйме



2.1.9-чыйме

О чекитине коюлган же курулган  $\vec{a}, \vec{b}$  векторлорун суммасы деп, жактары  $\vec{a}, \vec{b}$  векторлору болгон параллелограммдын  $O$

чекитинен чыккан диагонали болгон  $\vec{c}$  векторун алууга болот. Ал үчүн эркин абалдагы  $\vec{a}, \vec{b}$  векторлорун  $O$  чекитине параллель которуп, бир  $O$  чекитинен чыгуучу векторлор катарында элестетибиз (2.1.8-чыйме).

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  үч векторун кошууда параллелепипед эрежеси кеңири

колдонулат. Ал үчүн бул векторлорду бир  $O$  чекитинен чыгуучу абалга параллель которобуз. Алардын суммасы деп, кырлары  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  болгон параллелепипеддин  $O$  чекитинен чыгуучу башкы диагональ болгон  $\vec{d}$  векторун айтабыз (2.1.9-чыйме).

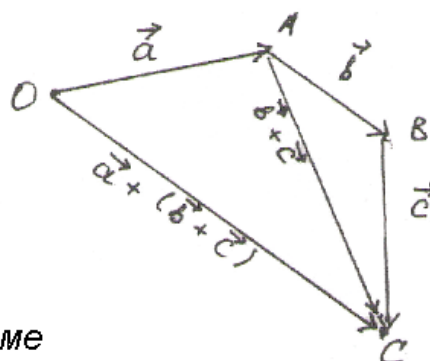
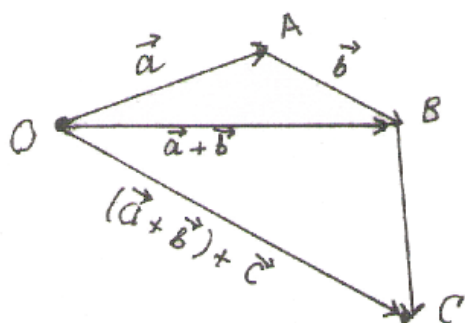
Векторлорду кемитүү амалы ушундай эле эрежелерде жүргүзүлүп,  $\vec{a} - \vec{b}$  айырмасын  $\vec{a}$  векторуна « $-\vec{b}$ » вектору кошулат деп түшүнөбүз.

Векторлорду кошуу амалы төмөндөгүдөй касиеттерге ээ:

1°.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ , кошуу коммутативдүү.

Чындыгында эле  $O$  чекитине курулган жактары  $\vec{a}, \vec{b}$  болгон параллелограммдын диагонали өзгөрбөгөндүктөн (2.1.8-чыйме), векторлорду кошуу орун алмаштыруучулук касиетине ээ.

2°.  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ , кошуу ассоциативдүү.



2.1. 10-чыйме

Чынында векторлорду кошуунун аныктамасына ылайык  $O$  чекитине улаштырылган  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  векторлорун курсак (2.1. 10 – чыйме), үч вектордун суммасы болгон  $\vec{OC}$  векторунун өзгөрбөгөнүн көрөбүз.

Сөз кылынган 1°, 2° эрежелер чектелген сандагы векторлорду кошууда сакталат деп эсептейбиз.

## II. Векторлорду санга көбөйтүү.

Кандайдыр бир  $\lambda \in R$  чыныгы саны жана  $\vec{a}$  вектору берилсин.

**2.1.2 Аныктама.**  $\vec{a}$  векторун  $\lambda$  санына көбөйтүү деп

1) узундугу  $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$  санына барабар;

2)  $\lambda > 0$  болсо,  $\vec{a}$  вектору менен бир багытта,

$\lambda < 0$  болсо,  $\vec{a}$  векторуна карама – каршы багытта;

деген шарттарын канааттандыруучу  $\vec{b}$  векторун түшүнөбүз жана аны  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$  деп жазабыз.

Эгерде  $\lambda = 0$  болсо,  $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$  нөл вектор деп эсептейбиз.  $\vec{a}$  вектору жана  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$  вектору коллинеардуу векторлор болушат жана тескерисинче  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  векторлору коллинеардуу болушса, анда сөзсүз  $\lambda \in R$  саны табылып,  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$  ( $\vec{a} \neq \vec{0}$ ) барабардыгы аткарылат.

$\vec{a}$  векторун  $\lambda$  санына көбөйтүү амалын жардамы менен, ал сүрөттөгөн кесиндилерди берилген  $\lambda$  катышына бөлүүгө болот.

Векторлорду санга көбөйтүү амалында төмөндөгүдөй касиеттер орун алат:

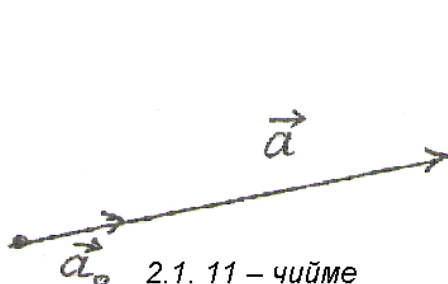
$$1^{\circ}. (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a},$$

$$2^{\circ}. \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a},$$

3<sup>o</sup>.  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ . Мында  $\lambda, \mu \in R$ , ал эми  $\vec{a}, \vec{b}$  каалагандай эркин берилген векторлор.

Векторду санга көбөйтүү амалын жардамы менен каалаган  $\vec{a}$  векторунун бирдик векторун табуу эрежесин чыгарабыз.

**2.1.3 Аныктама.** Берилген  $\vec{a}$  векторунун багытындагы бирдик векторду  $\vec{a}_0$  деп белгилеп, аны  $\vec{a}$  векторунун бирдик вектору же орту (кээде ортасы) деп атайбыз.



Демек,  $\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|}$  деп тандасак, анда

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \text{ болот (2.1.11 - чийме).}$$

Эгерде  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  векторлорун тобу берилип,

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0 \quad (*)$$

шарты бардык  $\lambda_i \equiv 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) болгондо гана аткарылса, анда аларды сызыктуу көз каранды эмес векторлор системасын түзөт дейбиз. Ал эми кайсы бир  $\lambda_i \neq 0$  болгон учурда деле (\*) шарты аткарыла берсе, бул векторлордун тобу сызыктуу көз каранды системаны түзүшөт.

Векторлор сызыктуу көз каранды системаны түзүшсө, анда алардын бирин башкалары менен сызыктуу туюнтууга болот. Чынында эле (\*) шарты кайсы бир  $\lambda_k \neq 0$  болгондо аткарылды дейли ( $1 \leq k \leq n$ ):

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0.$$

Бул барабарсыздыкты  $\lambda_k \neq 0$  санына бөлүп жиберип,  $\vec{a}_k$  ны тапсак

$$\vec{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \vec{a}_{k-1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \vec{a}_n \quad \text{сызыктуу туюнтуусуна ээ}$$

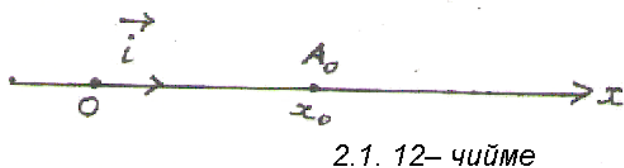
болобуз.

Сызыктуу көз каранды векторлор системасына эң жөнөкөй мисал катары коллинеардуу векторлордун тобун келтирүүгө болот.

Ошентип бардык векторлордун көптүгү кошуу, кемитүү, санга көбөйтүү амалдарына карата сызыктуу мейкиндиктин бардык талаптарын канааттандырып, сызыктуу вектордук мейкиндикти түзөт.

### 2.1.3 Сандык мейкиндиктерде векторлорду сүрөттөө

Векторлордун мейкиндиктерде жайгашуу абалдарын декарттык координаталар системасында үйрөнөбүз.  $R^1$  мейкиндигиндеги векторлордун баары сан огу болгон бир түздө жайгашып, өз ара коллинеардуу болушат. Бул мейкиндиктеги каалаган  $\vec{a}$  эркин векторун  $O$  башталмасына оң багытка карап курсак, анын бүтүүчү учу  $A_0$  чекитине бир  $x_0$  саны туура келет (2.1.12 – чийме). Бул  $x_0$  саны  $\vec{a}$



2.1.12- чийме

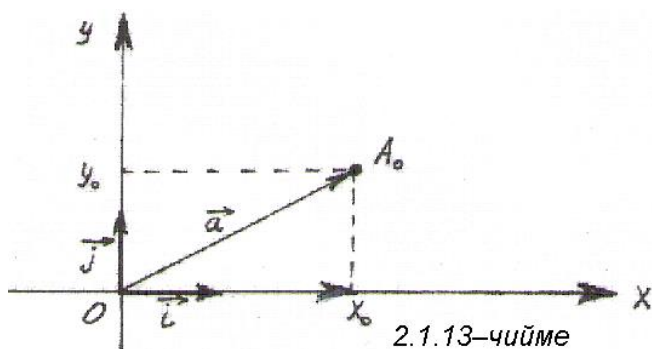
векторун сызыктуу координатасы деп аталат.  $\vec{a}$  векторунун орту  $\vec{a}_0 = \vec{i}$  векторуна  $\lambda = x_0$  санын (координатасын) көбөйтүү менен,  $\vec{a}$  векторун  $x_0$  координатасы

аркылуу

$$\vec{a} = x_0 \cdot \vec{i} \quad (2)$$

көрүнүштө туюнтуп жаза да болот.

Эгерде  $\vec{a}$  вектору  $O$  чекитинен терс багытка карап курулса, (2) туюнтуусу  $\vec{a} = -x_0 \cdot \vec{i}$  көрүнүштө болот. Демек,  $R^1$  мейкиндигинде



2.1.13- чийме

бардык векторлор дарек координаталары менен (2) көрүнүштө жаза алабыз.

$R^2$  мейкиндигинде (тегиздигинде) жайгашкан каалагандай эркин  $\vec{a}$  векторун

$Oxy$  декарттык координаталар тегиздигинде карайбыз.  $\vec{a}$  векторун  $O$



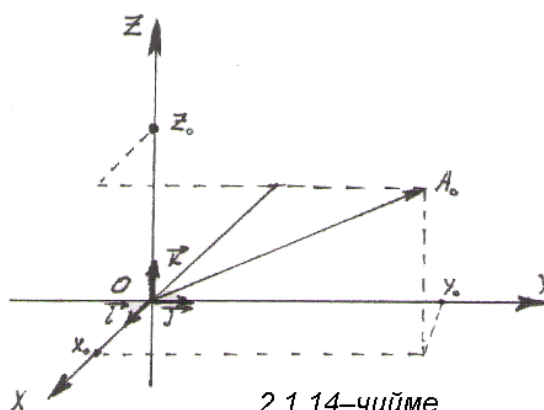
координата башталмасына которуп курсак, анын бүтүүчү учу болгон  $A_0$  чекитине кандайдыр бир  $(x_0; y_0)$  координаталары туура келет (2.1.13 - чийме).  $Ox$  жана  $Oy$  координаталык окторунун ортторун тиешелүү түрдө  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  бирдик векторлору десек, анда  $\vec{a}$  вектору жактары  $x_0\vec{i}$ ,  $y_0\vec{j}$  болгон параллелограммдын диагонали катарында өзүнүн координаталары (дареги) менен

$$\vec{a} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} \quad (3)$$

көрүнүштө туюнтулат. Бул учурда  $A_0$  чекитин  $(x_0; y_0)$  координаталары  $\vec{a}$  векторуна координаталар болуп,  $\vec{a} = \{x_0; y_0\}$  же  $\vec{a}(x_0; y_0)$  көрүнүштөрдө даректештирип жазылышат.

**2.1.4 Аныктама.**  $O$  координата башталмасына координаталык октордун багыты боюнча курулган өз ара перпендикуляр бирдик векторлордун тобу, берилген декарттык системанын ортонормалдашкан базиси деп аталат (ортобазис). Ортонормалдашкан базис сызыктуу көз каранды эмес векторлор системасын түзөт.

$Ox$  декарттык системасында координаталык октордун орттору  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  векторлору ортонормалдашкан базисти түзүшүп, координаталары менен  $\vec{i} = \{1; 0\}$ ,  $\vec{j} = \{0; 1\}$  көрүнүштөрдө жазылышат. Демек (3) туюнтуусун,  $\vec{a}$  векторун  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  ортонормалдык базиси боюнча ажыратуу деп айтабыз. Мындай ажыратуу бир маанилүү болуп,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  базиси менен  $\vec{a}$  векторун экинчи башка көрүнүштө ажыратуу мүмкүн эмес. Анткени  $A_0$  чекитин бир гана  $(x_0; y_0)$  координаталары болуп,  $x_0\vec{i}$ ,  $y_0\vec{j}$  векторлорун суммасы да жалгыз гана вектор болот. Бул ажыралыштагы  $x_0\vec{i}$ ,  $y_0\vec{j}$  векторлорун  $\vec{a}$  векторун түзүүчүлөрү (компоненттери) дейбиз.



2.1.14-чийме

$R^3$  мейкиндигиндеги багыттуу кыймылдарды болсо, үч өлчөмдүү Охуз декарттык координаталар системасында жайгашкан векторлор аркылуу, математикалык тилде жазып үйрөнүбүз. Бул мейкиндиктен эркин тандалган  $\vec{a}$  векторун  $O$  координата башталмасына которуп куралы.  $\vec{a}$  векторун бүтүүчү учу  $A_0$  чекитин координаталары болгон  $(x_0; y_0; z_0)$  - үчтүгү,  $\vec{a}$  векторунун координаталар болушат (2.1.14 - чийме).  $\vec{a}$  вектору координаталары же даректери менен  $\vec{a} = \{x_0; y_0; z_0\}$  же  $\vec{a}(x_0; y_0; z_0)$  көрүнүштөрдө жазылат.

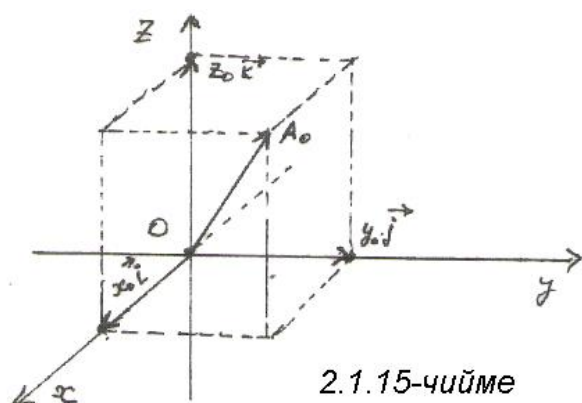
Охуз координаттык системасында  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  векторлорун же координаттык орттун ортонормалдашкан базис десек, анда  $\vec{a}$  векторун кырлары  $x_0 \vec{i}, y_0 \vec{j}, z_0 \vec{k}$  болгон параллелепипеддин башкы диагонали катарында

$$\vec{a} = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} \quad (4)$$

үч векторлорлордун суммасы түрүндө жаза алабыз (2.1.15 - чийме).  $R^3$  мейкиндигин базистик векторлор координаталары менен

$$\vec{i} = \{1; 0; 0\}, \vec{j} = \{0; 1; 0\}, \vec{k} = \{0; 0; 1\}$$

көрүнүштөрдө жазылышат. Ошентип  $R^3$  мейкиндигинде кандай гана  $\vec{a}$



вектору берилбесин, аны бир маанилүү түрдө  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  ортонормалдык базиси боюнча (4) көрүнүштө ажыратып жазууга болот.  $x_0 \vec{i}, y_0 \vec{j}, z_0 \vec{k}$  векторлору  $\vec{a}$  векторун түзүүчүлөрү (компоненттери), ал эми ажыралыштагы  $x_0, y_0, z_0$

коэффициенттери  $\vec{a}$  векторунун тандалган базиске карата координаталары деп аталышып,  $\vec{a}$  вектору  $\vec{a} = \{x_0; y_0; z_0\}$ ,  $\vec{a}(x_0; y_0; z_0)$  көрүнүштөрдө даректештирилет.

$R^n$  мейкиндигинде  $n$  өлчөмдүү координаталык системанын ортонормалдык базисин  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  бирдик векторлорлорун тобу түзүшсө, анда аларды координаталары менен  $n$  координаталуу векторлор

$$\vec{e}_1 = \{1; 0; \dots; 0\},$$

$$\vec{e}_2 = \{0; 1; \dots; 0\},$$

-----

$$\vec{e}_n = \{0; 0; \dots; 1\}$$

сыяктуу жазабыз. Бул векторлор  $n$  өлчөмдүү декарттык координаталар башталмасынан башталышкан өз ара перпендикуляр  $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n$  координаталык окторунда жайгашып, каноникалык түргө келтирилген базистик система болушат.

$R^n$  мейкиндигинде эркин алынган  $\vec{a}$  векторун  $O$  координата башталмасына которуп курганда, вектордун бүтүүчү учу  $A_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$  координаталуу чекит болсун дейли. Андай болсо,

берилген ортонормалдык базисине карата  $\vec{a}$  векторун бир маанилүү түрдө  $\vec{a} = x_1^0 \vec{e}_1 + x_2^0 \vec{e}_2 + \dots + x_n^0 \vec{e}_n$  (5)

көрүнүштө ажыратууга болот.  $\vec{a}$  вектору координаталары менен  $\vec{a} = \{x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0\}$ ,  $\vec{a}(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$  көрүнүштөрдө даректештирилет.

Жогоруда көрсөтүлгөн каноникалык түргө келтирилген  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  базистик системадан башка каалагандай эле  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  сызыктуу көз каранды эмес векторлор системасын базистик система деп алып, алар аркылуу каалагандай  $\vec{a}$  векторун сызыктуу туюнтууга болот:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n. \quad (5^B)$$

Мындагы  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  сандары  $\vec{a}$  векторун  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  базистик системасына карата координаталары (даректери) деп аталышып,  $\vec{a}(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$  же  $\vec{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n\}$  көрүнүштөрдө белгиленишет.

Ушундай эле векторлордун базистик системаларын  $R^2$ ,  $R^3$

мейкиндиктеринде тандап,  $\vec{a}$  векторун тандалган базиске карата ажыратып жазууга болот.

Айрым учурларда  $\vec{a} = \overrightarrow{OA_0}$  векторун,  $A_0$  чекити менен  $O$  башталмасын туташтыруучу  $\vec{r}$  радиус вектору деп атап,  $R^2$  де  $\vec{r} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ ;  $R^3$  тө  $\vec{r} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ ;  $R^n$  де  $\vec{r} = x_1^0\vec{e}_1 + x_2^0\vec{e}_2 + \dots + x_n^0\vec{e}_n$  көрүнүштөрдө жазууга болот.

### 2.1.4 Векторлор менен жүргүзүлүүчү сызыктуу амалдарды координаталары аркылуу туюнтуу

$R^3$  мейкиндигиндеги  $Oxyz$  координаталар системасында

$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$  жана  $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$  векторлору координаталары менен берилсин.

Анда аларды  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  үчтүгү боюнча  $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$  жана  $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$  деп ажыратып жазууга болот. Бул ажыроолор бир маанилүү болгондуктан, векторлордун барабар болуу шарты

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \\ z_1 = z_2 \end{cases} \text{ координаталары тең болсо гана аткарыларын көрөбүз.}$$

$\vec{a}$  жана  $\vec{b}$  векторлорун кошууда

$$\vec{a} + \vec{b} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$$

ээ болобуз.

Демек, эки векторду кошууда анын тиешелүү координаталары кошулат же кошуу амалы

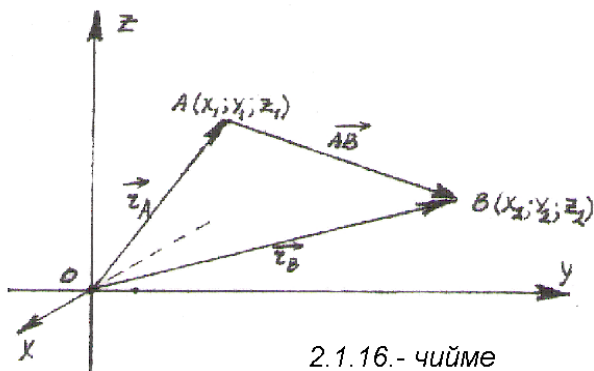
$$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\} \text{ көрүнүштө аткарылат.}$$

Ошондой эле кемитүүдө  $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$  болот. Эгерде козголбос  $\overrightarrow{AB}$  вектору берилип, анын учтары  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$  координаталарына ээ болсо, бул чекиттердин радиус – векторлорун

$\vec{r}_A = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ ,  $\vec{r}_B = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$  көрүнүштө жазып,  $\vec{AB}$  векторун координаталарын

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

теңдештигинен  $\vec{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$  көрүнүштө табабыз (2.1.16-чийме). Демек, козголбос  $\vec{AB}$  векторун координаталары вектордун бүтүүчү учу  $B$  чекитин координаталарынан, башталуу учу  $A$  чекитин тиешелүү координаталарын кемитүү менен табылат.



Берилген  $\vec{a}$  векторун  $\lambda$  чыныгы санына көбөйтүү, анын координаталарын  $\lambda$  санына көбөйтүү менен ишке ашырылып,

$$\begin{aligned} \lambda\vec{a} &= \lambda(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = \\ &= \lambda x_1\vec{i} + \lambda y_1\vec{j} + \lambda z_1\vec{k} \end{aligned} \quad \text{жана}$$

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\} \quad \text{көрүнүштөрдө}$$

жазылат.

Эгерде  $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ ,  $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$  векторлору

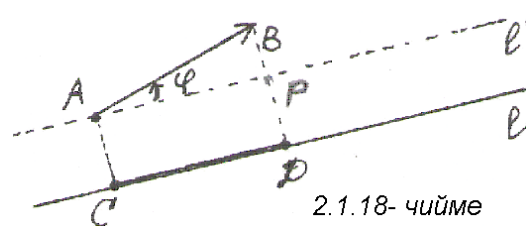
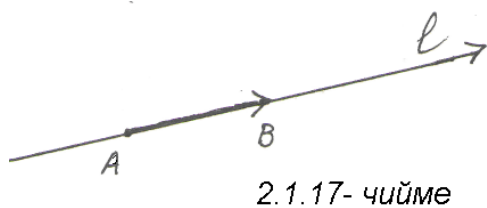
коллинеардуу болушса, анда кандайдыр бир  $\lambda$  саны табылып,  $\vec{a} = \lambda\vec{b}$  байланышы аткарылат. Бул учурда алардын координаталары

$$x_1 = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2, z_1 = \lambda z_2 \quad \text{байланышында болуп,} \quad \lambda = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

теңдештигине ээ болобуз. Демек, коллинеардуу векторлордун тиешелүү координаталары өз ара пропорционалдуу болушат жана тескерисинче, тиешелүү координаталары пропорционалдуу векторлор сөзсүз коллинеардуу болушат.

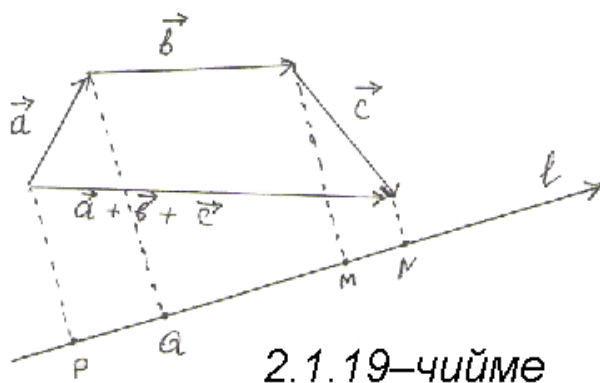
## 2.1.5 Векторлордун сан огундагы проекциясы

Кандайдыр бир  $\ell$  сан огун алып, анда жайгашкан  $A$  чекитинен  $B$  чекитине карай багытталган  $AB$  кесиндисин сызалы (2.1.17 -чийме).



Бул  $AB$  кесиндисин узундугу болгон  $|AB|$  санын, кесиндин чоңдугу деп айтабыз. Эгерде кесиндин багыты сандык октун багыты менен дал келсе, анын чоңдугун оң чоңдук деп «+» белгиде, сандык октун багытына карама - каршы болсо, терс чоңдук деп «-» белгиде жазышат.

$l$  сан огу жана ага таандык болбогон  $\overrightarrow{AB}$  козголбос вектору берилсин. Вектордун учтары  $A, B$  чекиттеринен  $l$  түзүнө перпендикуляр түшүрүп, кесилиш чекиттерин тиешелүү түрдө  $C, D$  чекиттери дейли. Натыйжада  $l$  түзүндө багытталган  $CD$  кесиндиси тургузулат (2.1.18-чийме).



**2.1.5 Аныктама.**  $l$  сан огундагы  $\overrightarrow{AB}$  векторунун проекциясы деп, жогорудагы усул менен тургузулган  $CD$  кесиндисин чоңдугу (узундугу) болгон  $|CD|$  санын айтабыз жана

$$\text{Пр}_l \overrightarrow{AB} = |CD| \quad (6)$$

деп белгилейбиз.

Вектордун  $l$  түзүндөгү проекциясы менен анын узундугун арасында кандай байланыш бар экенин көрсөтөлү:  $\triangleright$  2.1.18-чиймеде көрсөтүлгөндөй  $A$  чекитинен  $l$  түзүнө параллель  $l'$  түзүн жүргүзөлү.  $AB$  кесиндиси менен  $l'$  түзүнүн арасындагы  $\varphi$  бурчу,  $AB$  кесиндиси менен  $l$  түзүнүн арасындагы бурчка барабар жана  $AP$  менен  $CD$  кесиндилерин чоңдуктары да барабар  $|AP| = |CD|$ .  $\triangle APB$  тик бурчтуу үч бурчтугунан  $\cos \varphi = \frac{|AP|}{|AB|}$  же  $|CD| = |AP| = |AB| \cos \varphi$  келип чыгат. Мындан

$$\text{Пр}_l \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \varphi \quad (7)$$

вектордун узундугу менен анын проекциясынын арасындагы (7) байланыш формуласына ээ болобуз. <

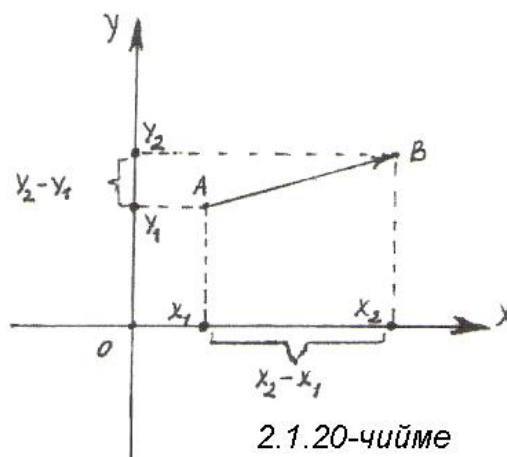
Вектордун  $l$  сан огундагы проекциясынын дагы бир касиетин көргөзөлү:

$$\text{Пр}_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{Пр}_l \vec{a} + \text{Пр}_l \vec{b} + \text{Пр}_l \vec{c} \quad (8)$$

же векторлордун суммасын проекциясы, алардын проекцияларын суммасына барабар болот.

▷ Чынында эле  $\text{Пр}_l \vec{a} = |PQ|$ ,  
 $\text{Пр}_l \vec{b} = |QM|$ ,  $\text{Пр}_l \vec{c} = |MN|$  болуп (2.1.19-чыйме),

$\text{Пр}_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = |PN| = |PQ| + |QM| + |MN|$  келип чыгат же (8) дин туура экендиги далилденет. Ошентип вектордун проекциясы вектор болбостон кадимки эле сан болот. <



Декарттык координаталар системасында берилген  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  векторунун координаталык октордогу проекциялары, анын координаталары болушат  $\text{Пр}_{ox} \overrightarrow{AB} = x_2 - x_1$ ,  $\text{Пр}_{oy} \overrightarrow{AB} = y_2 - y_1$ . Ошондуктан векторду координаталары менен базистик системаларга карата (3), (4), (5) ажыратууларын тиешелүү түрдө

$$\vec{a} = \text{Пр}_{ox} \vec{a} \cdot \vec{i} + \text{Пр}_{oy} \vec{a} \cdot \vec{j}, \quad (3^A)$$

$$\vec{a} = \text{Пр}_{ox} \vec{a} \cdot \vec{i} + \text{Пр}_{oy} \vec{a} \cdot \vec{j} + \text{Пр}_{oz} \vec{a} \cdot \vec{k}, \quad (4^A)$$

$$\vec{a} = \text{Пр}_{ox_1} \vec{a} \cdot \vec{e}_1 + \text{Пр}_{ox_2} \vec{a} \cdot \vec{e}_2 + \dots + \text{Пр}_{ox_n} \vec{a} \cdot \vec{e}_n \quad (5^A)$$

көрүнүштөрдө жаза алабыз.

## §2.2 Векторлорду скалярдык көбөйтүү

### 2.2.1 Скалярдык көбөйтүү түшүнүгү

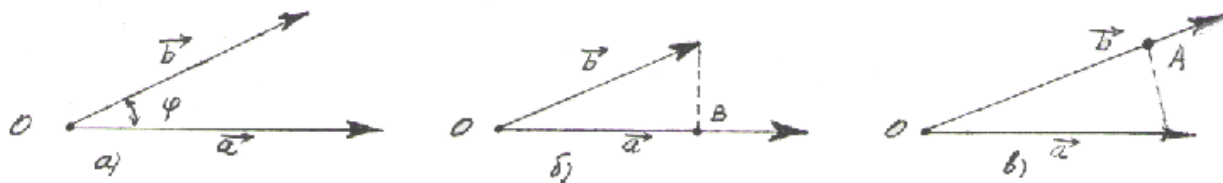
Векторлордун узундук чоңдугу жана проекциялары гана сан болуп, өздөрү сенек таяк сымал вектор бойдон калгандыктан, векторлор менен

сандар сыяктуу арифметикалык амалдарды аткара албайбыз, б.а улаштырып кошууга, кыркып кемитүүгө болгону менен, аларды көбөйтүүгө жана бөлүүгө арга табылбайт. Ошондуктан жогоруда векторлорду кошуунун, санга көбөйтүүнүн жаңы эрежелерин түздүк. Ошол сыяктуу эле векторлорду көбөйтүүнүн жаңы эрежелерин кабыл алабыз. Алардын бири векторлорду скалярдык көбөйтүү (сандык чоңдуктарын көбөйтүү) деп аталат.

**2.2.1 Аныктама.** Берилген  $\vec{a}$  жана  $\vec{b}$  векторлорун скалярдык көбөйтүндүсү деп  $(\vec{a}, \vec{b})$  же  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  символу менен белгиленген

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \quad (9)$$

же  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$  көрүнүштө эсептелген санды айтабыз.



2.2.1-чийме

Эки векторду скалярдык көбөйтүүдө векторлордун өздөрү көбөйтүлбөстөн, аларды мүнөздөөчү сан чоңдуктары, б.а. узундуктары жана алардын арасындагы бурчтун косинусу болушкан сандар көбөйтүлүшөт. Эгерде  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  векторлорун арасындагы бурчту  $(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$  десек (2.2.1 а)-чийме), анда  $\vec{b}$  векторун  $\vec{a}$  векторундагы проекциясы  $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$  (2.2.1 б)- чийме), жана  $\vec{a}$  векторун  $\vec{b}$  векторундагы проекциясы  $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$  (2.2.1 в)- чийме) болорун эске алып, скалярдык көбөйтүүнүн (9) эрежесин

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad (10)$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$$

көрүнүштөрдө жазууга болот. Демек, эки векторду скалярдык көбөйтүү үчүн биринчисин узундугуна, экинчи вектордун биринчи векторго түшүрүлгөн проекциясын көбөйтүп коюу жетиштүү. Ал эми



векторлордун бирөөсү нөлдүк вектор болсо, анда скалярдык көбөйтүндү  $(\vec{a}, \vec{0}) = 0$  болот.

### 2.2.2 Скалярдык көбөйтүүнүн касиеттери

**1<sup>0</sup>.** Өз ара перпендикуляр эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар, ал эми параллель векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү, алардын узундуктарынын көбөйтүндүсүнө барабар:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0, \quad (11)$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|. \quad (11^A)$$

▷ Чындыгында эле бул учурда векторлордун арасындагы бурч  $\vec{a} \wedge \vec{b} = 90^\circ \Rightarrow \cos 90^\circ = 0$  болгондуктан, (9) эрежесинен  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$  экендиги келип чыгат. (11) шарты эки вектордун ортогоналдык (перпендикулярдык) шарты деп аталат. Ошентип скалярдык көбөйтүү эки вектордун бирөөсү нөлдүк вектор болгондо жана экөө өз ара перпендикуляр болгондо гана нөл санына барабар болот. Параллель болгон учурда  $\varphi = 0^\circ$  болуп,  $\cos 0^\circ = 1 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . ◁

**2<sup>0</sup>.** Скалярдык көбөйтүү коммутативдүү  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$  болот.

▷  $\cos \varphi$  жуп функция болгондуктан  $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$  тең болушуп, бурчтун кайсы вектордон башталып ченелүүсүнөн көз каранды болбойт, ал эми сандардын  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  көбөйтүүсү коммутативдүү. Ошондуктан скалярдык көбөйтүүдө коммутативдүүлүк шарты аткарылат. ◁

**3<sup>0</sup>.** Скалярдык көбөйтүү кошуу амалына карата бөлүштүрүүчүлүк касиетине ээ:

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}) \text{ жалпы учурда}$$

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{c}) + \dots + (\vec{a}_n, \vec{c}) \text{ болот.}$$

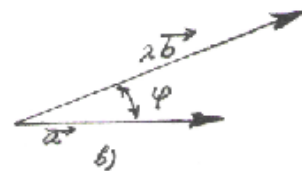
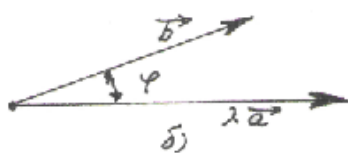
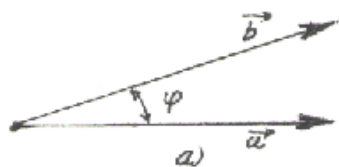
▷ Чындыгында эле (10) эрежесин колдонуп,  $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$  теңдештигин

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{c}| \cdot \text{Pr}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) \stackrel{(8)}{=} |\vec{c}| \left[ \text{Pr}_{\vec{c}} \vec{a} + \text{Pr}_{\vec{c}} \vec{b} \right] = |\vec{c}| \cdot \text{Pr}_{\vec{c}} \vec{a} + |\vec{c}| \cdot \text{Pr}_{\vec{c}} \vec{b} \stackrel{(10)}{=} (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$$

туура экендигин көрөбүз. ◁

**4<sup>0</sup>.  $\lambda$  көбөйтүндүсүн (санын) скалярдык көбөйтүү белгисин сыртына чыгарууга болот:**

$$(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}). \quad (12)$$

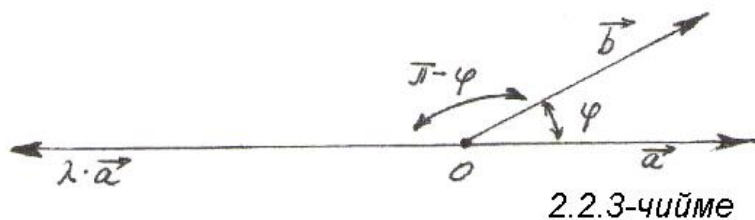


### 2.2.2 –чүймө

▷  $\lambda = 0$  болгон учурда (12) нин туура болору көрүнүп турат. Ошондуктан  $\lambda \neq 0$  деп  $\lambda > 0$ ,  $\lambda < 0$  учурларга бөлүп карайлы.  $\lambda > 0$  болсо  $\vec{a}$  жана  $\vec{b}$  векторлорунун арасындагы бурч өзгөрбөй,  $\varphi = (\lambda \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})$  барабардыктары сакталат (2.2.2 -чүймө).

Ошондуктан  $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = |\lambda \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = |\vec{a}| \cdot \lambda |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = (\vec{a}, \lambda \vec{b})$ ,

$(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = |\lambda \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$  барабардыктары орун алып, (12) туура болот.



Эгерде  $\lambda < 0$  (2.2.3-чүймө) болсо,  $|\lambda| = -1$  ал эми  $(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$  десек,  $\lambda \vec{a}$  жана  $\vec{b}$  векторлорун арасындагы бурч  $\pi - \varphi$

ге барабар. Келтирүүнүн формуласы боюнча  $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$  болгондуктан,

$$(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = |\lambda \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot (-\cos \varphi) = -|\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = -|\lambda| \cdot (\vec{a}, \vec{b}) = -(-\lambda) \cdot (\vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$$

орун алат ( $|\lambda| > 1$  болсо узарат;  $|\lambda| < 1$  болсо кыскарат). ◁

### 2.2.3 Векторлорду координаталары боюнча скалярдык көбөйтүү

$R^3$  мейкиндигиндеги Охуз декарттык координаталар системасында

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  ортонормалдашкан базисиндеги координаталары менен берилген

$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}, \quad \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$$

векторлорун скалярдык көбөйтөлү. Бул векторлор - аталган базисте өзүнүн координаталары менен

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$$

көрүнүштө туюнтулгандыктан, скалярдык көбөйтүүнүн  $3^0, 4^0$  касиеттерин пайдаланып

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 (\vec{i}, \vec{i}) + x_1 y_2 (\vec{i}, \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i}, \vec{k}) + \\ &+ y_1 x_2 (\vec{j}, \vec{i}) + y_1 y_2 (\vec{j}, \vec{j}) + y_1 z_2 (\vec{j}, \vec{k}) + z_1 x_2 (\vec{k}, \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k}, \vec{j}) + z_1 z_2 (\vec{k}, \vec{k}) \end{aligned}$$

ээ болобуз. Мында ортогоналдык (11) векторлор  $(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0$ , коллинеардуу (11<sup>A</sup>) бирдик векторлор  $(\vec{i}, \vec{i}) = (\vec{j}, \vec{j}) = (\vec{k}, \vec{k}) = 1$  скалярдык көбөйтүндүлөрүнө ээ болгондуктан,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (13)$$

ээ болуп, ортогоналдык базиске карата координаталары менен берилген векторлорду скалярдык көбөйтүү эрежесин табабыз. Ошентип, кайсы бир  $R^2, R^3, \dots, R^n$  сан мейкиндиктеринде ортонормалдык базистерге карата координаталары менен берилген эки векторду скалярдык көбөйтүү үчүн, алардын бир аттуу координаталарын көбөйтүп, суммалоо жетиштүү.

Мисалы,  $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$  жана  $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$  векторлорун скалярдык көбөйтсөк,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 4 \cdot 6 + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 20$  саны келип чыгат.

$R^2$  мейкиндигинде  $\vec{i}, \vec{j}$  ортонормалдык базисине карата  $\vec{a}(x_1; y_1), \vec{b}(x_2; y_2)$  координаталуу векторлорун скалярдык көбөйтүндүсү  $(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2$  көрүнүштө, ал эми  $R^n$  деги  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  ортонормалдык базисинде  $\vec{a}(x_1; x_2; \dots; x_n), \vec{b}(y_1; y_2; \dots; y_n)$  координаталуу векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (14)$$

көрүнүштө эсептелишет.

Векторду өзүнө өзүн скалярдык көбөйтүү скалярдык квадрат деп аталып,  $(\vec{a}, \vec{a}) = a^2$  көрүнүштө жазылат.  $R^3$  мейкиндигинде  $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ , векторунун скалярдык квадраты, (13) эрежесин жардамы менен,  $\vec{a}^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$  (15)

формуласы боюнча эсептелет. Ал эми (9) эрежесин пайдаланып,

$$\vec{a}^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}|^2 \text{ экинчи тендештикке ээ болобуз.}$$

Аларды тендештирсек

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \text{ же } |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad (16)$$

(узундук оң болгондуктан тамырдын “+” белгиси алынды) формуласын алабыз. Демек ортонормалдашкан базисте координаталары менен берилген вектордун узундугу - координаталарын квадраттарын суммасынан квадраттык тамыр алуу менен эсептелет.  $R^n$  деги декарттык координаталар системасында  $\vec{a}(x_1; x_2; \dots; x_n)$  векторун узундугу  $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}$  көрүнүштө эсептелет.

*Эскертүү:* Скалярдык көбөйтүү эрежесин киргизүү менен, векторлордун сызыктуу мейкиндигин, скалярдык квадратка негизделген (чен) метрика киргизип. метрикалык мейкиндике чейин кеңейтүүгө болот.

## 2.2.4 Векторлордун арасындагы бурчтун косинусу. Багыттоочу косинустар

Скалярдык көбөйтүүнүн аныктамасында  $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ ,  $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$  эки вектордун арасындагы бурч болгондуктан, мындан

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad (17)$$

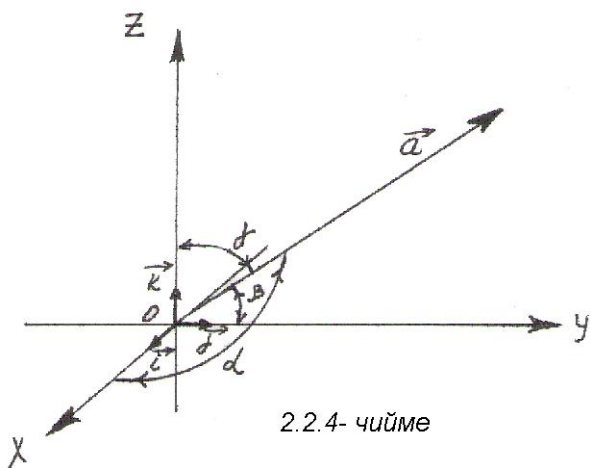
формуласы келип чыгат ( $\vec{a}, \vec{b}$  векторлорун нөлдүк эмес векторлор деп эсептейбиз).

$R^3$  мейкиндигинде  $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ ,  $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$  координаталары менен берилген векторлор үчүн (17) формуласын

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (18)$$

көрүнүштө жазабыз.

$$\text{Мисалы: } \vec{a} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k} = \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 2 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j}$$



векторлорун арасындагы бурчтун косинусу

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 3^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \end{aligned}$$

санына барабар.

(18) формуласын пайдаланып,  $R^3$  тө эркин алынган  $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$

вектору менен  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  координаттык окторун арасындагы бурчтун

косинусун эсептейли (2.2.4- чийме). Айталы,  $\vec{a}$  вектору  $Ox$  огу менен  $\alpha$ ,  $Oy$  огу менен  $\beta$ ,  $Oz$  огу менен  $\gamma$  бурчтарын түзсүн.

$Ox$  огу менен  $\vec{a}$  векторун арасындагы бурч  $\vec{a}$  жана  $\vec{i} = \{1; 0; 0\}$  векторлорун арасындагы бурч менен тең болгондуктан, (18) формуласы боюнча

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \\ &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \frac{x_1}{|\vec{a}|} \quad (19) \end{aligned}$$

ээ болобуз. Ушундай эле талкуулоолордун натыйжасында  $\vec{j} = \{0; 1; 0\}$ ,  $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$  болгондуктан,

$$\cos \beta = \frac{(\vec{a}, \vec{j})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \frac{y_1}{|\vec{a}|}, \quad (20)$$

$$\cos \gamma = \frac{(\vec{a}, \vec{k})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} = \frac{z_1}{|\vec{a}|} \quad (21)$$

формулаларына ээ болобуз.

(19) - (21) формулалары менен табылган бурчтардын косинустары,  $\vec{a}$  векторун координаттык окторго карата багыттоочу косинустары деген атты алышкан. Мисал катарында  $\vec{n}_0 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  бирдик векторун багыттоочу косинустарын эсептеп көрөлү. Бирдик вектор болгондуктан  $|\vec{n}_0| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$  узундугуна ээ. Ошондуктан  $\vec{n}_0$  вектору менен  $Ox$  огу арасындагы бурчтун косинусу,  $Oy$  огу менен болгон бурчтун косинусу  $\cos\beta = \frac{(\vec{n}_0, \vec{j})}{|\vec{n}_0| \cdot |\vec{j}|} = \frac{y}{1} = y$ ,  $Oz$  огу менен болгон бурчтун косинусу

$$\cos\gamma = \frac{(\vec{n}_0, \vec{k})}{|\vec{n}_0| \cdot |\vec{k}|} = \frac{z}{1} = z \text{ келип чыгып, } \vec{n}_0 \text{ бирдик векторун координаталары}$$

$$\vec{n}_0 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k} \text{ же}$$

$\vec{n}_0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$  көрүнүштө болорун көрөбүз. Мындан  $|\vec{n}_0| = 1$  болгондуктан, анын узундугу катарында

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

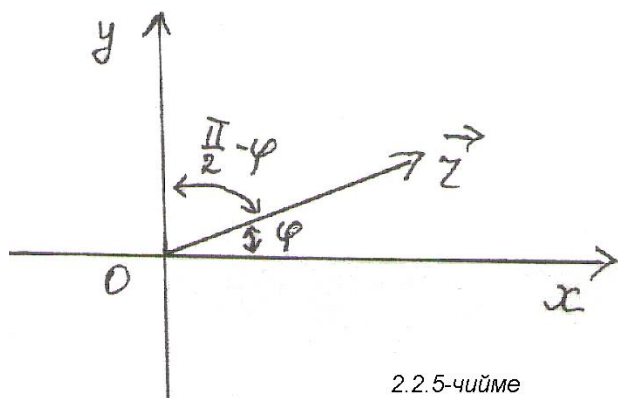
теңдештиги аткарыларын көрөбүз. Ошентип каалагандай  $\vec{n}_0$  бирдик векторунун координаттык окторго карата багыттоочу косинустары, анын координаталары болушат.

$R^2$  мейкиндигиндеги (2.2.5-чийме)  $Oxy$  координаттык тегиздигинде жайгашкан  $\vec{n}_0 = x\vec{i} + y\vec{j}$  бирдик векторун  $Ox$  огу менен түзгөн бурчу  $\varphi$  болсо,  $Oy$  огу менен түзгөн бурчу  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  болот. Бул

$$\text{учурда} \quad \vec{i} = \{1, 0\}, \vec{j} = \{0, 1\}$$

болгондуктан,

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_0, \vec{i})}{|\vec{n}_0| \cdot |\vec{i}|} = \frac{x}{1} = x$$



2.2.5-чийме

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi = \frac{(\vec{n}_0, \vec{j})}{|\vec{n}_0| \cdot |\vec{j}|} = \frac{y}{1} = y$$

координаталарын табабыз. Ошондуктан  $R^2$  деги каалагандай  $\vec{n}_0$

бирдик векторун координаталары менен  $\vec{n}_0 = \{\cos \varphi; \sin \varphi\}$  же

$\vec{n}_0 = \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}$  деп жазууга болот.

Бул учурду  $R^3$  мейкиндигиндеги  $Oxy$

тегиздиги деп элестетсек,  $\vec{n}_0$  бирдик

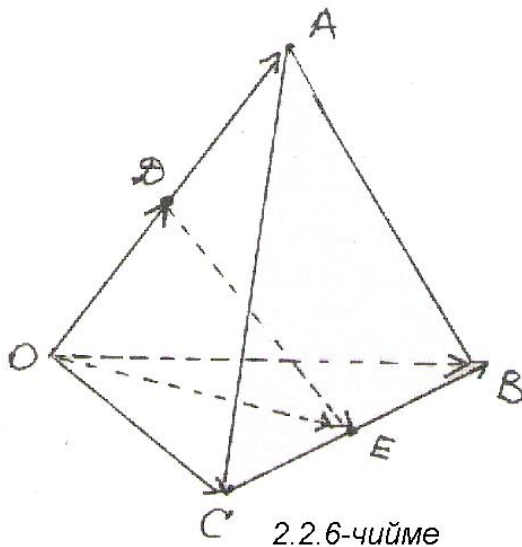
вектору  $Oz$  огуна ортогоналдуу

(перпендикуляр) жайгашып,

$\vec{n}_0 = \{\cos \varphi; \sin \varphi; 0\} = \{\cos \varphi; \sin \varphi\}$

көрүнүштө жазылган десе болот.

$R^3$  мейкиндигинде  $\vec{a}(x; y; z)$  векторун



$\vec{i} = \{1; 0; 0\}$ ,  $\vec{j} = \{0; 1; 0\}$ ,  $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$

базистик системага карата

координаталарын багыттоочу косинустары менен

$x = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{i})$ ,  $y = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{j})$ ,  $z = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{k})$  көрүнүштөрдө

жазабыз. Жалпы учурда  $R^n$  мейкиндигиндеги  $\vec{a}(x_1; x_2; \dots; x_n)$  векторун

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  ортонормалдашкан базистик системасына карата

координаталары  $x_i = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{e}_i) = \text{Pr}_{\vec{e}_i} \vec{a}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  көрүнүштө

туюнтулушат.

§ 2.1, § 2.2 баяндалган материалдарды бышыктоочу мисалдарды карайлы.

## 5. Мисалдар

1. Координаталары  $M(1; -1; 3)$  жана  $N(2; 0; 7)$  болгон чекиттер берилсе,  $\overline{MN}$  векторун координаттык октордогу проекцияларын тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright \overrightarrow{MN}$  векторунун  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  координаттык октордогу проекциялары анын координаталары болгондуктан, аларды аныктайбыз.  $\overrightarrow{MN}$  векторун координатасы, анын бүтүүчү учу  $N$  чекитин координаталарынан  $M$  башталуу чекитин координаталарын кемитүү менен аныкталгандыктан:

$$\text{Пр}_{Ox} \overrightarrow{MN} = 2 - 1 = 1, \quad \text{Пр}_{Oy} \overrightarrow{MN} = 0 - (-1) = 1, \quad \text{Пр}_{Oz} \overrightarrow{MN} = 7 - 3 = 4$$

жоопторун алабыз.  $\triangleleft$

**2.**  $OABC$  тетраэдри берилген (2.2.6-чийме). Эгерде  $D$  жана  $E$  чекиттери  $OA$  жана  $BC$  кырларын тең ортосу экендиги белгилүү болсо, анда  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  векторлор системасын базис деп эсептеп, ага карата  $\overrightarrow{DE}$  векторун координаталарын тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Тетраэдрдин кырларын жана  $D, E$  чекиттерин байланыштыруучу кесиндилерди векторлор катарында түшүнсөк:  $\triangle ODE$  - үч бурчтугунан  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}$ ,  $\triangle OCE$  үч бурчтугунан  $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE}$  теңдештиктерине ээ болобуз.

Маселенин шарты боюнча  $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$  болгондуктан,  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$

теңдештигинен  $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$  келип чыгып,  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

сызыктуу туюнтуусуна ээ болобуз. Аны  $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

көрүнүштө кайра жазсак,  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$  базистик векторлорун системасына

карата  $\overrightarrow{DE} = \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$  координаталарына ээ вектор болорун көрөбүз.  $\triangleleft$

$$\mathbf{3.} \quad \vec{a}_1 = \{-1; 2; 0\}, \quad \vec{a}_2 = \{3; 1; 1\}, \quad \vec{a}_3 = \{2; 0; 1\}, \quad \vec{a} = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \frac{1}{3}\vec{a}_3$$

векторлору берилсе:

а)  $|\vec{a}_1|$  узундугун,  $\vec{a}_1$  векторун орту  $\vec{a}_1^0$  векторун тапкыла.

б)  $\cos(\vec{a}_1 \wedge \vec{j})$  - бурчтун косинусун аныктагыла.

в)  $\vec{a}$  векторун абцисасы  $x_a$  координатасын тапкыла.

г)  $\text{Пр}_j \vec{a}$  санын тапкыла.



**Чыгаруу:**  $\triangleright$  **а)**  $\vec{a}_1$  векторун координаталары белгилүү болгондуктан, анын узундугу  $|\vec{a}_1| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$  саны болот.

**а)**  $\vec{a}_1$  векторун ортасы  $\vec{a}_1^0 = \frac{1}{|\vec{a}_1|} \cdot \vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \vec{a}_1$  болгондуктан,

координаталары боюнча теңдеп,

$$\vec{a}_1^0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-1); \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2; \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 0 \right\} = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}; 0 \right\} \text{ ээ болобуз.}$$

**б)**  $\cos(\vec{a}_1, \vec{j})$  саны,  $Oy$  огуна карата  $\vec{a}_1$  векторун багыттоочу косинусу болгондуктан, (20) формуласынын негизинде

$$\cos(\vec{a}_1, \vec{j}) = \frac{y_{a_1}}{|\vec{a}_1|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ жообуна ээ болобуз.}$$

$$\text{в) } \vec{a} = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \frac{1}{3}\vec{a}_3 \quad (*)$$

теңдештигинен тиешелүү координаталары барабар болорун эске алып,  $\vec{a}$  векторун абциссасы  $x_a = x_{a_1} - 2x_{a_2} + \frac{1}{3}x_{a_3} = (-1) - 2 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{19}{3}$  саны экендигин табабыз. (\*) ажыралышы  $\vec{a}$  векторунун  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  базистик системага карата  $\vec{a} = \{1; -2; \frac{1}{3}\}$  координаталарына ээ болорун көрсөтөт.

**г)**  $\text{Pr}_{\vec{j}} \vec{a} = \text{Pr}_{Oy} \vec{a}$  болот, анткени  $\vec{j}$  базистик вектору  $Oy$  огунда жайгашып, анын орту катарында кызмат кылат.  $\vec{a}$  векторун  $Oy$  огундагы проекциясы (4<sup>A</sup>) формуласын негизинде анын ординатасы болот. Демек, (\*) теңдештигин ординаталарына карата теңдештирсек,

$$y_a = y_{a_1} - 2y_{a_2} + \frac{1}{3}y_{a_3} = 2 - 2 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 2 - 2 + 0 = 0 \text{ санына ээ болуп,}$$

берилген  $\vec{a}$  вектору  $Oy$  огуна ортогоналдуу (перпендикуляр) жайгашарын көрөбүз.  $\triangleleft$

**4.**  $\vec{a} + \vec{b}$  жана  $\vec{a} - \vec{b}$  векторлору өз ара перпендикуляр болушу үчүн, ар түрдүү деп эсептелген  $\vec{a}, \vec{b}$  векторлоруна кандай шарт коюлууга тийиш?

**Чыгаруу:** ▷ Ортогоналдык векторлордун скалярдык көбөйтүндүсү нөлгө барабар болгондуктан,  $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = 0$  аткарылууга тийиш.

Скалярдык көбөйтүүнүн касиеттерине таянып,

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) &= (\vec{a} + \vec{b}, \vec{a}) - (\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) + (\vec{b}, \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{b}, \vec{b}) = \\ &= (\vec{a}, \vec{a}) - (\vec{b}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \end{aligned} \quad \text{ээ}$$

болобуз. Мындан ортогоналдык шарты аткарылуусу үчүн  $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$

же  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$  болуп,  $\vec{a}$  жана  $\vec{b}$  векторлорунун узундуктары барабар болушу керек деген шарт коюларын билебиз. <

**5.**  $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$  векторлорун скалярдык көбөйтүндүсүн тапкыла.

**Чыгаруу:** ▷ Берилген  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  векторлорун координаталары  $\vec{a}(-3; 2; 0)$ ,  $\vec{b}(4; -2; 1)$  белгилүү болгондуктан,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (-3) \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = -12 - 4 + 0 = -16 \text{ ээ болобуз. } <$$

**6.**  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$  жана алардын арасындагы бурч  $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$  экендиги белгилүү болсо,  $(\vec{a}, \vec{b})$  скалярдык көбөйтүндүсүн эсептегиле.

**Чыгаруу:** ▷ Скалярдык көбөйтүндүнүн аныктамасы боюнча

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ санына барабар. } <$$

**7.**  $\vec{a} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$  векторлору  $\alpha$  кандай маани кабыл алганда ортогоналдуу болушат?

**Чыгаруу:** ▷ Эки вектордун ортогоналдуулук шарты алардын скалярдык көбөйтүндүсүн  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$  болушу эсептелгендиктен, координаталары менен берилген векторлорду скалярдык көбөйтүү эрежеси боюнча

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= 2 \cdot 1 + \alpha \cdot 3 = 2 + 3\alpha = 0 \text{ шартына ээ болобуз. Мындан} \\ 2 + 3\alpha &= 0 \text{ же } \alpha = -\frac{2}{3} \text{ келип чыгат. Ошентип } \alpha = -\frac{2}{3} \text{ болсо гана,} \end{aligned}$$

берилген  $\vec{a}(2; -\frac{2}{3})$ ,  $\vec{b}(1; 3)$  векторлору өз ара перпендикуляр (ортогоналдуу) болушат.  $\triangleleft$

**8.**  $\vec{a} = \{2; -3\}$  векторуна ортогоналдуу бирдик векторлорду тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Изделүүчү бирдик векторлордун бирөөсү  $\vec{n}_0 = \{x_0; y_0\}$

болсун дейли. Анда ал  $\vec{a}$  векторуна перпендикуляр болуп  $(\vec{a}, \vec{n}_0) = 2x_0 - 3y_0 = 0$  шартын канааттандырат. Экинчи жактан анын узундугу  $|\vec{n}_0| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 1$  болууга тийиш. Бул эки шартты бириктирсек,

$$\begin{cases} 2x_0 - 3y_0 = 0, \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \end{cases} \quad \text{эки } x_0, y_0 \text{ белгисиздерине карата теңдемелер}$$

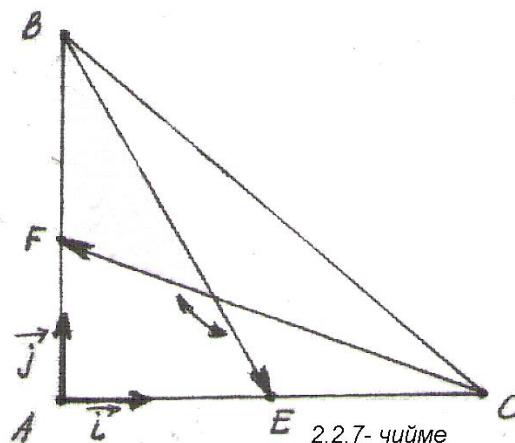
системасына ээ болобуз. Биринчисинен,  $x_0 = \frac{3}{2}y_0$  маанисин таап

экинчисине коюп,  $y_0 = \pm \frac{2}{\sqrt{13}}$  чечимдерин табабыз. Мындан

$x_0 = \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = \pm \frac{3}{\sqrt{13}}$  табылып, берилген  $\vec{a}$  векторуна перпендикуляр эки бирдик

$$\vec{n}_{01} = \left\{ \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right\}, \quad \vec{n}_{02} = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}} \right\} \quad \text{векторлорун жашары келип}$$

чыгат.  $\triangleleft$



**9.** Тең капталдуу  $\triangle ABC$  тик бурчтуу үч бурчтугун тар бурчтарынын чокуларынан жүргүзүлгөн медианалардын кесилишинен пайда болгон  $\varphi$  туюк бурчун тапкыла (2.2.7-чийме).

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Тик бурчтуу  $\triangle ABC$  үч бурчтугун жактарын жана жүргүзүлгөн медианаларын векторлор деп түшүнсөк, анда изделүүчү бурч  $\varphi = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF})$  векторлорунун арасындагы бурчка барабар болорун көрөбүз. Тең капталдуу жактардын (катеттердин) узундугун  $k$  санына

барабар деп алып, тик бурчтуу  $A$  чокусуна тургузулган  $\vec{i}, \vec{j}$  бирдик векторлорун колдонуп,

$$\vec{AC} = k\vec{i}, \quad \vec{AB} = k\vec{j}, \quad \vec{AE} = \frac{k}{2}\vec{i}, \quad \vec{AF} = \frac{k}{2}\vec{j},$$

$$\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE} = -k\vec{j} + \frac{k}{2}\vec{i} = \frac{k}{2}\vec{i} - k\vec{j},$$

$$\vec{CE} = \vec{CA} + \vec{AE} = -k\vec{i} + \frac{k}{2}\vec{j} \quad \text{теңдештиктерине ээ болобуз. Ошентип } \vec{i}, \vec{j}$$

векторлорун базистик векторлор системасы катарында кабыл алып, бул базиске карата  $\vec{BE}, \vec{CF}$  векторлорунун координаталары  $\vec{BE} = \left\{ \frac{k}{2}; -k \right\}, \vec{CF} = \left\{ -k; \frac{k}{2} \right\}$  болорун аныктайбыз. Бул векторлордун арасындагы бурчту (18) формуласына ылайык

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{BE}, \vec{CF})}{|\vec{BE}| \cdot |\vec{CF}|} = \frac{\frac{k}{2} \cdot (-k) + (-k) \cdot \frac{k}{2}}{\sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + (-k)^2} \cdot \sqrt{(-k)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}} = \frac{-k^2}{\sqrt{\frac{5k^2}{4}} \sqrt{\frac{5k^2}{4}}} = \frac{-k^2}{\frac{5k^2}{4}} = -\frac{4}{5}$$

эсептеп,  $\cos \varphi = -\frac{4}{5}$  же  $\varphi = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$  жообуна ээ болобуз.  $\triangleleft$

**10.**  $\triangle ABC$  үч бурчтугу  $A(1; 2), B(3; 4), C(6; 2)$  чокуларын координаталары менен берилген, анын  $A$  чокусундагы ички бурчту тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$   $A$  чокусундагы ички бурч  $\vec{AB}$  менен  $\vec{AC}$  векторлорун арасындагы  $\varphi$  бурчуна барабар болот. Берилген векторлордун

$$\vec{AB} = \{3-1; 4-2\} = \{2; 2\}, \quad \vec{AC} = \{6-1; 2-2\} = \{5; 0\} \quad \text{координаталарын жана}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad |\vec{AC}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{узундуктарын}$$

табабыз.

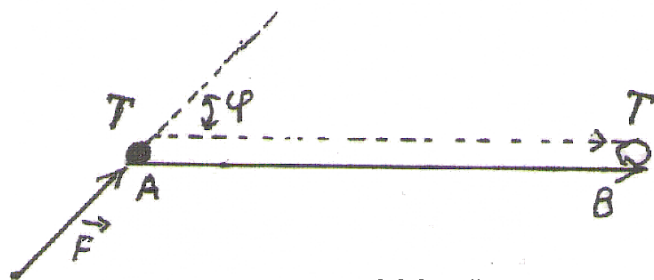
(18) - формуланын негизинде алардын арасындагы бурчтун косинусу

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{AB}, \vec{AC})}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot 0}{2\sqrt{2} \cdot 5} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{болуп,}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

келип чыгат. <

**11.** Турактуу  $\vec{F}$  күчүнүн аракети менен  $A$  чекитинде жайгашкан тело түз сызыктуу кыймылга келип,  $B$  чекитине которулары белгилүү болсо, анда  $\vec{F}$  күчүн аткарган жумушун эсептегиле (2.2.8. -чийме).



2.2.8 -чийме

Чыгаруу:  $\vec{F}$  күчүн аткарган жумушу  $A = (\vec{F}, \vec{AB})$  скалярдык көбөйтүндүсүнө барабар болору белгилүү. Бул скалярдык көбөйтүндүнүн

сандык мааниси же аткарылган жумуш

$$A = (\vec{F}, \vec{AB}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{AB}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos \varphi \text{ санына барабар. } <$$

## § 2.3 Вектордук көбөйтүү

### 2.3.1 Вектордук көбөйтүүнүн аныктамасы

Эки векторлорду скалярдык көбөйтүүдө аларды мүнөздөөчү сандык чоңдуктар болушкан векторлордун узундугу жана алардын арасындагы бурчтун косинусу көбөйтүлүп, көбөйтүүнүн натыйжасы сан болгон эле. Эки  $\vec{a}, \vec{b}$  векторлорун вектордук көбөйтүүсүн натыйжасы, үчүнчү бир жаңы вектор болот. Ошентип скалярдык көбөйтүүдө эки векторлор менен мүнөздөлүүчү кубулуштардын бири – бирине тийгизген таасирлерине сандык баа берилсе, вектордук көбөйтүүдө багыттык өзгөрүүлөрүнө баа берилет.

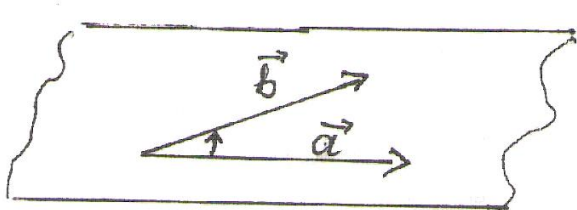
**2.3.1 Аныктама.** Эки  $\vec{a}$  жана  $\vec{b}$  векторлорун вектордук көбөйтүндүсү деп  $[\vec{a}, \vec{b}]$  же  $\vec{a} \times \vec{b}$  символу менен белгиленген, төмөндөгүдөй үч шартты канааттандырган үчүнчү бир жаңы векторду айтабыз (жазуу ыңгайлуулугуна карап, кээде аны бир тамга менен көрсөтүү үчүн  $\vec{c}$  деп белгилейбиз):

$$1. \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] \text{ векторун узундугу}$$

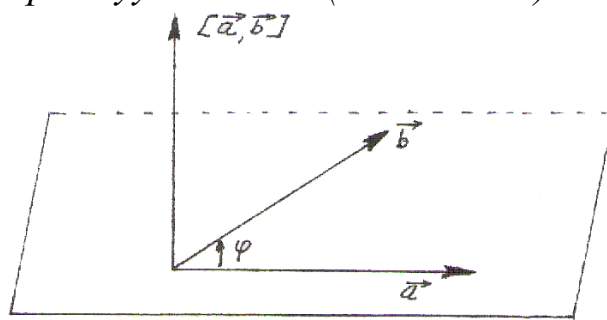
$$|\vec{c}| = \left| [\vec{a}, \vec{b}] \right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi \quad (22)$$

санына барабар.  $\varphi$  деп  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  векторлорун арасындагы  $\vec{a}$  дан  $\vec{b}$  га карай бурулган бурчту алабыз (2.3.1-чийме).

2.  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$  вектору  $\vec{a}$  жана  $\vec{b}$  векторлоруна (б.а.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  векторлору жайгашкан тегиздикке) перпендикуляр болууга тийиш (2.3.2-чийме).



2.3.1-чийме

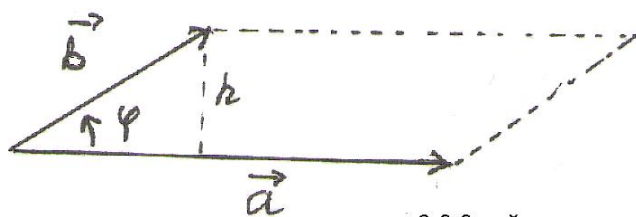


2.3.2.-чийме

3.  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$  векторунун учунан

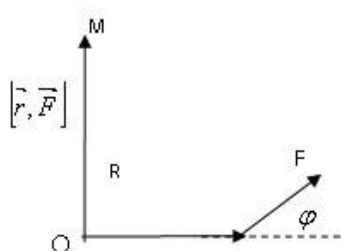
караганда  $\vec{a}$  векторунан  $\vec{b}$  векторуна карай багытталган кыска бурулуу жолу же  $\varphi$  бурчу саат стрелкасына каршы багытта болгондой көрүнүп турууга тийиш.

Аныктаманын 3 – шартын канааттандырган  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  жана  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$  үч векторлорун «оң үчтүктү» түзөт дейбиз.



2.3.3-чийме

векторлорду “оң кол” эрежеси менен  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$  – бармак,  $\vec{a}$  – сөөмөй,  $\vec{b}$  – ортоң кол манжаларын абалдарында деп элестетебиз.



2.3.3.а-чийме

Эгерде  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$  векторун учунан караган кезде  $\vec{a}$  дан  $\vec{b}$  га карай багытталган кыска бурулуу жолу саат стрелкасын багытында болгондой көрүнсө, анда үч  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $[\vec{a}, \vec{b}]$  векторлорун «сол үчтүктү» түзөт дейбиз.

Сол үчтүктү “сол кол” эрежесинде  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$  – бармактын,  $\vec{a}$  – сөөмөйдун,  $\vec{b}$  – ортоң кол манжаларын абалында тургандай элестетебиз.

Жактары  $\vec{a}$  жана  $\vec{b}$  векторлору болгон параллелограммдын аянты  $S_{\text{ПГ}} = |\vec{a}| \cdot h$  болуп,  $\sin \varphi = \frac{h}{|\vec{b}|}$  же  $h = |\vec{b}| \cdot \sin \varphi \Rightarrow S_{\text{ПГ}} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$  болору келип чыгат (2.3.3-чийме). Демек, вектордук көбөйтүндү болгон  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$  векторун (22) узундугу геометриялык мааниде: жактары  $\vec{a}, \vec{b}$  векторлору болгон параллелограммдын аянтына барабар болот  $S_{\text{ПГ}} = \left| [\vec{a}, \vec{b}] \right| = |\vec{c}|$ .

Механикалык жактан вектордук көбөйтүүнү  $\vec{F}$  күчүн О чекитине салыштырмалуу моментин чоңдугун табууда колдонобуз (2.3.3.a-чийме). Чынында эле О чекити, күч жана аракет башталган А чекити бир тегиздикте жайгашышса, анда  $\vec{r} = O\vec{A}, \vec{F}, O\vec{M}$  векторлору оң үчтүктү түзүшүп, вектордук көбөйтүндү катарында аныкталган  $[\vec{r}, \vec{F}]$  векторун узундугу болгон  $M_0 = |[\vec{r}, \vec{F}]| = |O\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \varphi$  саны,  $\vec{F}$  күчүн О чекитине салыштырмалуу моментин эсептөөчү формула болот.

### 2.3.2 Вектордук көбөйтүүнүн касиеттери

1<sup>0</sup>. Эки вектордун вектордук көбөйтүндүсү нөлдүк вектор болушу үчүн, сөзсүз бул эки векторлордун бирөөсү нөлдүк вектор же болбосо экөөсү коллинеардуу векторлор болушу керек.

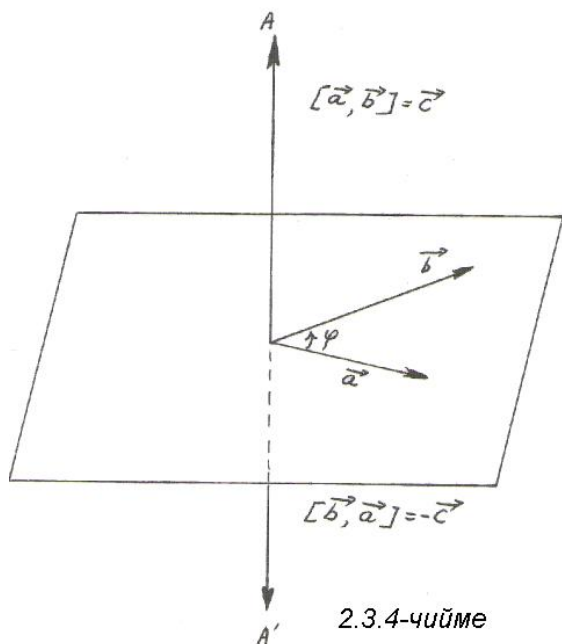
▷ Эгерде  $\vec{a}, \vec{b}$  векторлору коллинеардуу болушса, анда алардын арасындагы бурч  $0^\circ$  же болбосо  $\pi = 180^\circ$  болушу гана мүмкүн, анткени алар бир түздө же параллель түздөрдө жатышып, бир багытта же карама - каршы багыттарда гана жайгаша алышат. Бул учурда  $\sin 0^\circ = \sin \pi = 0$  болгондуктан, (22) формуладан  $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$  ээ болобуз. <

Нөлдүк вектор каалаган векторго коллинеардуу деп эсептелгендиктен, векторлордун бирөөсү нөлдүк вектор болгон учурда да  $[\vec{0}, \vec{b}] = \vec{0} = [\vec{a}, \vec{0}]$  болот.

2<sup>0</sup>. Вектордук көбөйтүү коммутативдүү эмес

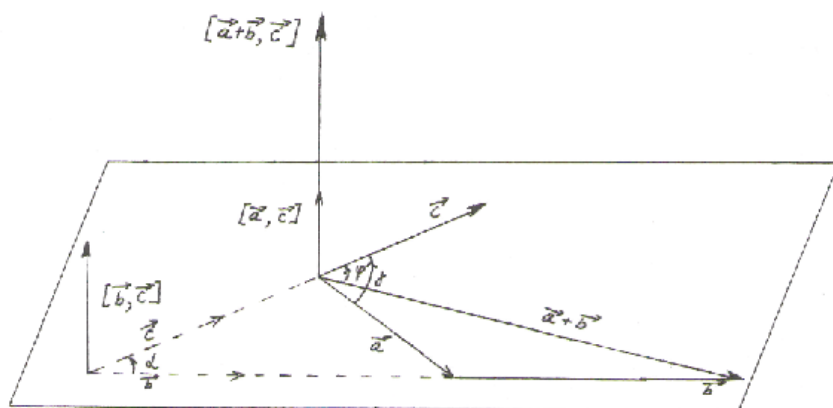
$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}] \quad (23)$$

▷ Чындыгында эле  $\sin \varphi$  так функция болгондуктан, бурчту эсептөө



багыты өзгөргөндө  $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$  болуп,  $[\vec{b}, \vec{a}]$  жана  $[\vec{a}, \vec{b}]$  векторлорун узундуктарын (22) формуласы боюнча эсептегенде,  $[\vec{b}, \vec{a}]$  векторун узундугу терс сан болгондой сезилет. Узундук ар дайым оң сан болгондуктан, бул учурда  $[\vec{b}, \vec{a}]$  көбөйтүндүсүндө  $\vec{b}$  векторунан  $\vec{a}$  векторуна карай кыска бурулуу жолун саат стрелкасына каршы же  $\varphi$  бурчун оң багытын сактап калуу үчүн,  $\varphi$  бурчуна

тегиздиктин төмөн жагынан же  $A'$  чекитинен гана кароого туура келет (2.3.4-чийме). Демек,  $[\vec{a}, \vec{b}]$  векторун түзүүдө  $\varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b})$  бурчун тегиздиктин үстүнкү жагындагы  $A$  чекитинен карап оң дейбиз,  $[\vec{b}, \vec{a}]$  векторун түзүүдө  $\varphi = (\vec{b} \wedge \vec{a})$  бурчун тегиздиктин төмөнкү жагындагы  $A'$  чекитинен карап оң дейбиз. Иш жүзүндө  $[\vec{a}, \vec{b}]$  жана  $[\vec{b}, \vec{a}]$  вектордук көбөйтүүлөрү бири - бири менен байланышпаган эки башка амал сыяктуу саналып, алардын арасындагы бурч эки учурда тең оң багытын сактап калат, б.а. жогору жагынан караганда  $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$  тартибинде жазылган



векторлор оң үчтүктү, ошондой эле төмөн жагынан караганда  $\vec{b}, \vec{a}, [\vec{b}, \vec{a}]$  тартибинде жазылган векторлор да оң үчтүктү түзүшөт.

Демек, (23)

барабардыгы

аткарылып,  $[\vec{a}, \vec{b}]$  жана  $[\vec{b}, \vec{a}]$  векторлору багыттары карама – каршы, бирок узундуктары барабар векторлор болушат



$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}] \text{ жана } |[\vec{a}, \vec{b}]| = |[\vec{b}, \vec{a}]|. \quad \triangleleft$$

3°. Вектордук көбөйтүү кошуу амалына карата бөлүштүрүүчүлүк касиетине ээ:  $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}].$  (24)

**Далилдөө:**

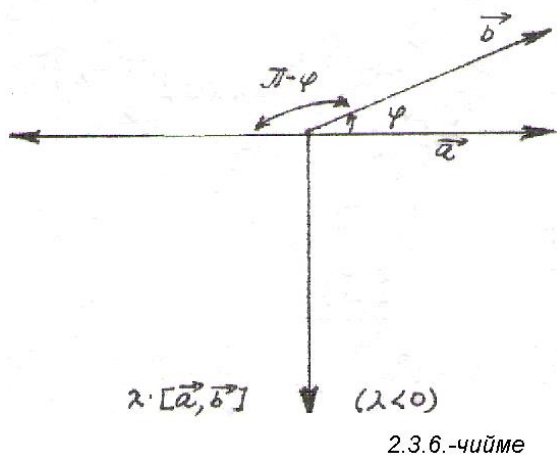
▷  $\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}$  эки векторлору бир тегиздикте жайгашып, үчүнчү

$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}]$  вектору менен оң үчтүктү түзүшкөндүктөн,  $\vec{a}, \vec{c}$  векторлору

жана  $\vec{b}, \vec{c}$  векторлору да бир тегиздикте жайгашып, тиешелүү түрдө

$[\vec{a}, \vec{b}]$  вектору менен оң үчтүктү түзүшөт (2.3.5.-чийме).

Бул касиетти геометриялык мааниде жактары  $\vec{a}, \vec{c}$  жана  $\vec{b}, \vec{c}$  векторлору болгон параллелограммдардын аянттарын суммасы,



жактары  $\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}$  векторлору болгон

параллелограммдын аянтына барабар деп түшүнөбүз. Жалпы учурда

$$[\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n, \vec{c}] = [\vec{a}_1, \vec{c}] + [\vec{a}_2, \vec{c}] + \dots + [\vec{a}_n, \vec{c}]$$

болот.  $\triangleleft$

4°.  $\lambda$  көбөйтүүчүсүн (санын) вектордук көбөйтүүнүн сыртына

чыгарууга болот

$$[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]. \quad (25)$$

▷  $\lambda = 0$  болсо, (25) теңдештиги аткарылары белгилүү, ал эми  $\lambda > 0$  болсо,  $\vec{a}$  же  $\vec{b}$  векторлорун бирөөсүнүн узундугу  $\lambda$  эсе узарып (кыскартып), арасындагы  $\varphi$  бурчу өзгөрбөйт. Натыйжада  $[\vec{a}, \vec{b}]$  векторун узундугу  $\lambda$  эсе узарып (кыскартып), (25) теңдештиги аткарылат.  $\lambda < 0$  болгондо ушундай эле абал тегиздиктин төмөн жагына карай багытталган  $\lambda [\vec{a}, \vec{b}]$  векторуна карата туура болот (2.3.6.-чийме).  $\triangleleft$

### 2.3.3 Вектордук көбөйтүүнү координаталары боюнча аткаруу

$R^3$  мейкиндигиндеги декарттык координаталар системасынын ортонормалдык  $\vec{i} = \{1; 0; 0\}$ ,  $\vec{j} = \{0; 1; 0\}$ ,  $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$  базистик

системасында координаталары менен  $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ ,  $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$  векторлору берилсин. Аларды вектордук көбөйтүүнүн касиеттерине таянып көбөйтсөк:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left[ x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \right]^{3^0, 4^0} = x_1x_2[\vec{i}, \vec{i}] + x_1y_2[\vec{i}, \vec{j}] + x_1z_2[\vec{i}, \vec{k}] + y_1x_2[\vec{j}, \vec{i}] + y_1y_2[\vec{j}, \vec{j}] + y_1z_2[\vec{j}, \vec{k}] + z_1x_2[\vec{k}, \vec{i}] + z_1y_2[\vec{k}, \vec{j}] + z_1z_2[\vec{k}, \vec{k}]$$

ээ болобуз. Коллинеардуу жана ортогоналдуу бирдик векторлор катарында

$$[\vec{i}, \vec{i}] = [\vec{j}, \vec{j}] = [\vec{k}, \vec{k}] = \vec{0} \text{ жана } [\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k};$$

$$[\vec{j}, \vec{i}] = -\vec{k}; \quad [\vec{i}, \vec{k}] = -\vec{j}; \quad [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j};$$

$[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$ ;  $[\vec{k}, \vec{j}] = -\vec{i}$  векторлоруна барабар болгондуктан,

$$[\vec{a}, \vec{b}] = x_1y_2 \cdot \vec{k} - x_1z_2 \cdot \vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1x_2\vec{k} + y_1z_2\vec{i} - z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} = (y_1z_2 - z_1y_2) \cdot \vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} \quad (26)$$

натыйжасына ээ болобуз. (26) формуласын эске оңой тутуу үчүн, аны аныктагыч көрүнүштө төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (27)$$

## 6. Мисалдар

1. Жактары  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  векторлору болгон параллелограммдын аянтын тапкыла.

**Чыгаруу:** ▷ Изделүүчү аянт  $S = |[\vec{a}, \vec{b}]|$  болгондуктан, берилген векторлордун вектордук көбөйтүндүсүн табабыз. (27) формуласын

пайдаланып,

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-1) + 2 \cdot (-1)\vec{j} + 1 \cdot 1 \cdot \vec{k} - 2 \cdot \vec{k} - (-1) \cdot 1 \cdot \vec{i} - 1 \cdot (-1)\vec{j} =$$

$$= -\vec{j} - \vec{k}$$

векторун табабыз. Анын узундугу

$$S = |[\vec{a}, \vec{b}]| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

параллелограмдын аянты болот. ◁

**2. Чокулары**  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  $O(0;0)$

чекиттери болгон үч бурчтуктун аянтын эсептегиле (2.3.7- чийме).

**Чыгаруу:** ▷ Үч бурчтук  $Oxy$  координаттык тегиздигинде жайгашкандыктан, (27) формуласын

колдонуу үчүн, үчүнчү координатасын  $z = 0$  деп эсептейбиз.  $\triangle OAB$  үч бурчтуктун аянты  $OACB$  параллелограммын аянтын тең жарымына барабар. Параллелограммдын аянты

$S_{OACB} = |[\vec{OA}, \vec{OB}]|$  болгондуктан,  $[\vec{OA}, \vec{OB}]$  вектордук көбөйтүндүсү болгон

векторду табабыз.

$$\vec{a} = \vec{OA} = \{x_1; y_1; 0\}, \vec{b} = \vec{OB} = \{x_2; y_2; 0\}$$

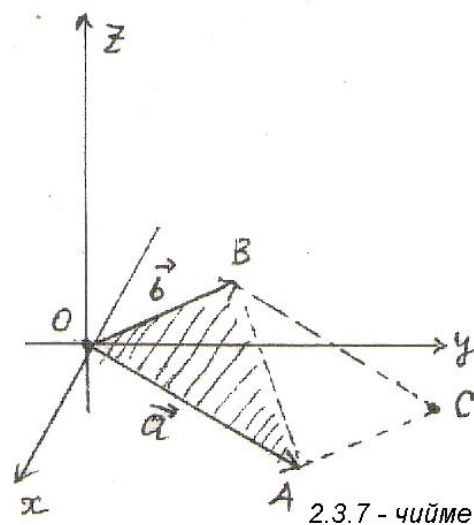
болгондуктан,

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot \vec{k} \text{ ээ болобуз.}$$

Анын узундугу  $|[\vec{a}, \vec{b}]| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2} = |x_1 y_2 - y_1 x_2|$  эсептелип (оң

мааниси алынат), үч бурчтуктун аянты  $S_{OAB} = \frac{1}{2} S_{OACB} = \frac{1}{2} \cdot |x_1 y_2 - y_1 x_2|$

келип чыгат. ◁



3. Чокулары  $A(0;0)$ ,  $B\left(\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ,  $C(1; 0)$  болгон үч бурчтуктун

аянтынын эсептегиле.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Жогорудагы мисалда келтирип чыгарган формула боюнча үч бурчтуктун аянты

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} |x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2| \text{ көрүнүштө эсептелип,}$$

$$B(x_1; y_1) = B\left(\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \quad C(x_2; y_2) = C(1; 0)$$

координаталуу чекиттер десек,

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} \left| \frac{3}{4} \cdot 0 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 \right| = \frac{1}{2} \left| -\frac{\sqrt{3}}{4} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8} - \text{ саны изделген аянт болот. } \triangleleft$$

4.  $\vec{a} = \{1; 2; -1\}$ ,  $\vec{b} = \{5; 4; 3\}$  векторлорун вектордук көбөйтүндүсүн тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  (27) - формуланы колдонуп,

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 8\vec{j} - 6\vec{k} \quad \text{векторун}$$

табабыз, аны координаталары менен  $[\vec{a}, \vec{b}] = \{10; -8; -6\}$  көрүнүштө жазууга болот.  $\triangleleft$

5. Эгерде  $\vec{a} \perp \vec{b}$  жана  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$  болсо,  $[2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}]$  векторун узундугун тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Вектордук көбөйтүүнүн касиеттерин пайдаланып,

$$[2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{a}] + 2[\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{b}, \vec{a}] - [\vec{b}, \vec{b}] = 2 \cdot 0 + 2[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{b}] - 0 = 3[\vec{a}, \vec{b}]$$

векторуна ээ болобуз. Анын узундугу

$$\left| [2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] \right| = 3 \left| [\vec{a}, \vec{b}] \right| = 3 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin 90^\circ = 6 \cdot 1 = 6$$

саны болот.  $\triangleleft$

6. Чокулары  $A(0;1)$ ,  $B(4; 5)$ ,  $C(6;-1)$  чекиттери болгон үч бурчтуктун аянтын тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Үч бурчтуктун бир да чокусу координата башталмасына дал келбегендиктен, 2 - мисалда келтирип чыгарылган үч бурчтуктун аянтын эсептөө формуласын пайдалана албайбыз.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \{4-0; 5-1\} = \{4; 4\}, \\ \text{Үч бурчтуктун жактары} \quad \overrightarrow{AC} &= \{6-0; -1-1\} = \{6; -2\} \end{aligned}$$

координаталуу векторлор болот десек, анда  $\triangle ABC$  нын аянты

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right|$  санына барабар болот. Ошондуктан аларды вектордук көбөйтүп,

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 4 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = (-8-24) \cdot \vec{k} = -32\vec{k} \quad \text{векторун табабыз. Анын}$$

узундугу  $|\vec{a}, \vec{b}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-32)^2} = 32$  саны болуп, изделген аянт

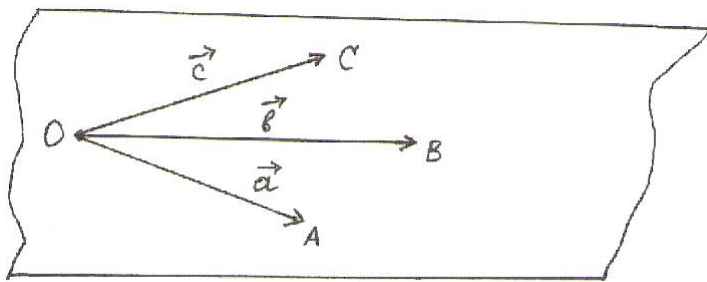
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16 \quad \text{аянт бирдигине ээ. } \triangleleft$$

## § 2.4 Векторлорду аралаш көбөйтүү

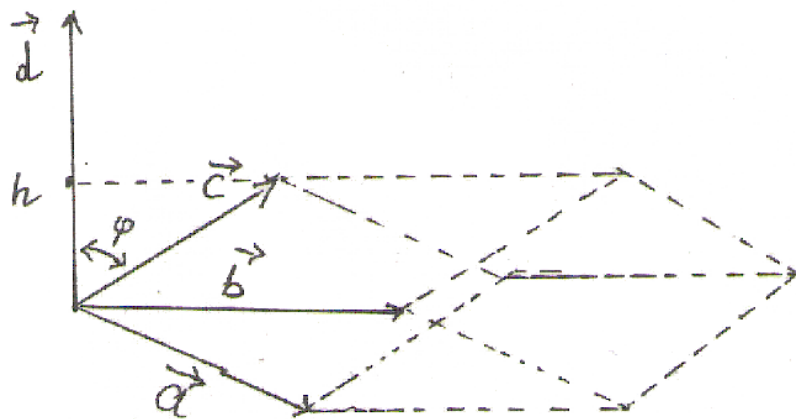
### 2.4.1 Аралаш көбөйтүү түшүнүгү жана аны геометриялык чечмелөө

Үч  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  векторлору берилсин. Алардын экөөсүн вектордук көбөйтсөк, жаңы  $[\vec{a}, \vec{b}]$  вектору келип чыгат. Келип чыккан векторду  $\vec{c}$  векторуна скалярдык көбөйтсөк,  $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$  саны келип чыгат. Бул сан  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  үч векторлорун аралаш көбөйтүндүсү деп аталып,  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  символу менен белгиленет, б.а.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}). \quad (28)$$



2.4.1-чийме



2.4.2-чийме

Берилген векторлорду бир  $O$  чекитине которуп куралы (2.4.1-чийме).

Эгерде  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  векторлорун бүтүүчү учтары  $A, B, C$  жана башталма  $O$  чекиттерин

төртөөсү тең бир тегиздикте жайгашып калышса, анда бул үч векторлор

компланардуу

векторлордун тобун түзүшөт. Бул учурда

алардын аралаш көбөйтүндүсү нөлгө

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$  тең болот,

анткени аныктама боюнча  $[\vec{a}, \vec{b}]$  вектору  $\vec{a}, \vec{b}$  векторлоруна

перпендикуляр, ошондуктан алар жайгашкан тегиздикке жана тегиздикте

жаткан  $\vec{c}$  векторуна да перпендикуляр болуп, скалярдык көбөйтүндүсү

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = 0 \quad (29)$$

болот. Бул (29) шарты үч вектордун компланардуулук шарты деп аталат.

Эгерде бул төрт  $O, A, B, C$  чекиттери бир тегиздикте жайгашпаган

болсо, анда  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  векторлору компланардуу эмес же бир тегиздикте

жайгашпаган векторлор болушуп, алардын жардамы менен кырлары

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  болгон параллелепипед кура алабыз (2.4.2-чийме).

$\vec{a}, \vec{b}$  векторлорун вектордук көбөйтүндүсү аларга перпендикуляр

$\vec{d}$  вектору болсун  $\vec{d} = [\vec{a}, \vec{b}]$ . Анда  $\vec{d}$  векторун узундугу  $S = |\vec{d}| = |[\vec{a}, \vec{b}]|$

кырлары  $\vec{a}, \vec{b}$  болгон параллелограммдын аянтына барабар.  $\vec{c}$  векторун

$\vec{d}$  векторуна түшүрүлгөн проекциясы болгон  $h = \text{Pr}_{\vec{d}} \vec{c}$  саны, курулган

параллелепипеддин бийиктиги болот. Скалярдык көбөйтүүнүн (10)

эрежесине ылайык аралаш көбөйтүү

$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{d}, \vec{c}) = |\vec{d}| \cdot \text{Pr}_{\vec{d}} \vec{c} = S \cdot h = V$  – курулган параллелепипеддин көлөмүнө барабар болот.

Жалпы учурда  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  векторлорун аралаш көбөйтүндүсүн  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm V$  (30)

кырлары  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  векторлору болгон параллелепипеддин « $\pm$ » белгидеги көлөмүнө барабар дейбиз. Эгерде  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  векторлору оң үчтүктү түзүшсө ( $\varphi$  тар бурч болгондо), «+» белгисин, ал эми сол үчтүктү түзүшсө ( $\varphi$  кең бурч болгондо),  $\vec{d}$  вектору карама - каршы багытка өзгөргөндүктөн, « - » белгисин алабыз. Эки учурда тең вектордун жайгашуу абалдарын эске алып, табылган  $V$  көлөмүн сандык маанисин оң сан деп эсептейбиз. Ошентип, векторлордун аралаш көбөйтүндүсү векторлор бир үчтүктө турганда гана көбөйтүү иреттеринен көз каранды болбойт.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}; \vec{b}, \vec{c}, \vec{a}; \vec{c}, \vec{a}, \vec{b};$  оң үчтүктөрдү түзүшкөндүктөн,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}),$$

ал эми  $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}; \vec{a}, \vec{c}, \vec{b}; \vec{c}, \vec{b}, \vec{a};$  сол үчтүктү түзүшүп,

$(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$  орун алат. Ар түрдүү үчтүктөргө кирген учурда векторлорду аралаш көбөйтүүлөр

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) \text{ байланышында болушат.}$$

#### 2.4.2 Аралаш көбөйтүүнү координаталар аркылуу жүргүзүү

$R^3$  мейкиндигиндеги декарттык координаталар системасын  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  базисинде үч  $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}, \vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$  векторлору координаталары менен берилсин. Биринчи экөөсүн вектордук  $[\vec{a}, \vec{b}]$  көбөйтүүнүн натыйжасында келип чыккан төртүнчү векторду курсак, ал (26) эрежесине ылайык

$[\vec{a}, \vec{b}] = \{y_1 z_2 - z_1 y_2; x_2 z_1 - x_1 z_2; x_1 y_2 - y_1 x_2\}$  координаталарына ээ болот.  $[\vec{a}, \vec{b}]$  векторун үчүнчү  $\vec{c}$  векторуна скалярдык көбөйтүү (13) формуласы боюнча эсептелгендиктен, аралаш көбөйтүүнү координаталары боюнча аткарып,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = x_3(y_1 z_2 - z_1 y_2) + y_3(x_2 z_1 - x_1 z_2) + z_3(x_1 y_2 - y_1 x_2) = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

көрүнүштөгү санга ээ болобуз.

$$\text{АНЫ } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (31)$$

үчүнчү тартиптеги аныктагыч катарында эстеп калабыз.

## 7. Мисалдар

**1.**  $\vec{a} = \{7; 4; 6\}$ ,  $\vec{b} = \{2; 1; 1\}$ ,  $\vec{c} = \{19; 11; 17\}$  векторлорун бир тегиздикте жайгашып компланардуу болорун көрсөтөлү.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Компланардуулуктун (29) шарты боюнча текшерсек,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 19 & 11 & 17 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 \cdot 17 - 17 + 2 \cdot 11 \cdot 6 + 4 \cdot 1 \cdot 19 - 19 \cdot 6 \cdot 1 - 7 \cdot 1 \cdot 11 - 2 \cdot 4 \cdot 17 =$$

$$= 119 + 132 + 76 - 114 - 77 - 136 = 0$$

алардын компланардуу экендигине күбө болбуз.  $\triangleleft$

**2.**  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  векторлору оң үчтүктү түзүшүп:  $\vec{a} \perp \vec{c}$ ,  $\vec{b} \perp \vec{c}$ ,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ ,  $|\vec{c}| = 5$ ,  $\varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 120^\circ$  экендиги белгилүү болсо,  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  аралаш көбөйтүндүсүн тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$   $\vec{a} \perp \vec{c}$ ,  $\vec{b} \perp \vec{c}$  болгондуктан  $\vec{c}$  вектору менен  $[\vec{a}, \vec{b}]$  вектору багытташ коллинеардуу векторлор болушуп, арасындагы бурч  $0^\circ$  ка тең болот. Ошондуктан



$$\begin{aligned}
 (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = |[\vec{a}, \vec{b}]| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 0^\circ = \\
 &= |[\vec{a}, \vec{b}]| \cdot 5 \cdot 1 = 5 |[\vec{a}, \vec{b}]| = 5 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 120^\circ = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \quad \text{келип чыгат. } \triangleleft
 \end{aligned}$$

**3.**  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  оң үчтүктү түзүшкөн өз ара перпендикуляр бирдик векторлор болушса,  $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} - \vec{k}, \vec{k})$  аралаш көбөйтүндүсүн тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Вектордук жана скалярдык көбөйтүүлөрдүн касиеттерин эске алып,

$$\begin{aligned}
 (\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} - \vec{i}, \vec{k}) &= ([\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} - \vec{i}], \vec{k}) = ([\vec{i}, \vec{j}] - [\vec{i}, \vec{i}] + [\vec{j}, \vec{j}] - [\vec{j}, \vec{i}], \vec{k}) = \\
 &= (\vec{k} - 0 + 0 - (-\vec{k}), \vec{k}) = (2\vec{k}, \vec{k}) = 2(\vec{k}, \vec{k}) = 2 \cdot |\vec{k}|^2 = 2 \cdot 1 = 2
 \end{aligned}$$

аралаш көбөйтүүнүн сандык маанисин табабыз.  $\triangleleft$

**4.** Кырлары  $\vec{a} = \{-2; -1; -1\}$ ,  $\vec{b} = \{4; 3; 1\}$  жана  $\vec{c} = \{1; 2; 3\}$  векторлору болгон параллелепипеддин көлөмүн тапкыла

**Чыгаруу:**  $\triangleright V = \pm (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  болгондуктан,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \stackrel{(30)}{=} \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 11 - 5 = -6 \quad \text{келип}$$

чыгат. Ал оң белгиде алынган  $V = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(-6) = 6$  көлөм бирдигине барабар.  $\triangleleft$

**5.** Чокулары  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(0; 1; 5)$ ,  $C(-1; 2; 1)$  жана  $D(1; 2; 3)$  чекиттери болгон пирамиданын көлөмүн тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Бул пирамиданын негизин жана каптал беттерин үч бурчтуктар түзүшкөндүктөн, анын көлөмү кырлары  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  векторлору болгон параллелепипеддин көлөмүнүн  $\frac{1}{6}$  бөлүгүнө барабар.

Демек, izdelүүчү көлөм

$V = \pm \frac{1}{6} (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$  көрүнүштө табылат.

$\vec{AB} = \{-1; -1; 6\}$ ,  $\vec{AC} = \{-2; 0; 2\}$ ,  $\vec{AD} = \{0; 0; 4\}$  координаталарына ээ, анда

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) \stackrel{30}{=} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \quad \text{келип чыгып, izdelүүчү}$$

көлөм



2.5.  $ABCDEF$  - туура алты бурчтугун жактарын  $\vec{AB} = \vec{p}$ ,  $\vec{BC} = \vec{q}$  векторлору катарында алып,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{DE}$ ,  $\vec{EF}$ ,  $\vec{FA}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$  жана  $\vec{AE}$  векторлорун  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$  векторлору аркылуу туюнткула.

(Жообу:

$$\vec{CD} = \vec{q} - \vec{p}, \vec{DE} = -\vec{p}, \vec{EF} = -\vec{q}, \vec{EA} = \vec{p} - \vec{q}, \vec{AC} = \vec{p} + \vec{q}, \vec{AD} = 2\vec{q}, \vec{AE} = 2\vec{q} - \vec{p}.)$$

2.6.  $\triangle ABC$  үч бурчтугун медианалары  $P$  чекитинде кесилишет. Мейкиндикте каалагандай эркин алынган  $O$  чекити берилсе,

$$O\vec{P} = \frac{1}{3}(O\vec{A} + O\vec{B} + O\vec{C}) \text{ барабардыгы орун аларын далилдегиле.}$$

2.7. Төмөндөгү векторлордун тобунун сызыктуу көз каранды системаны түзөрүн далилдегиле:

а) Эки  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$  векторлорун тобу коллинеардуу болушса гана, б.а багытташ же карама - каршы багытта болсо гана сызыктуу көз каранды векторлор системасын түзүшөт.

б) Үч  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$  векторлор тобу компланардуу болушса, б.а. бир тегиздикте же параллель тегиздиктерде жайгашышса гана сызыктуу көз каранды векторлор системасын түзүшөт.

в)  $R^3$  мейкиндигинде каалагандай 4 же андан көп ( $n > 4$ ) векторлордун тобу сызыктуу көз каранды системаны түзүшөт.

2.8. Берилген каалагандай  $\vec{a}, \vec{b}$  жана  $\vec{c}$  векторлору үчүн  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{b} + \vec{c}$ ,  $\vec{c} - \vec{a}$  векторлору компланардуу болорун далилдегиле.

2.9.  $OABC$  тетраэдринде  $AL$  медианасы  $ABC$  гранын  $P$  чекити менен  $|\vec{AP}| : |\vec{PL}| = 3 : 7$  катышында бөлөт.  $O\vec{A}$ ,  $O\vec{B}$ ,  $O\vec{C}$  векторлорун базистик системасында  $O\vec{P}$  векторун координатасын тапкыла.

$$(\text{Жообу: } O\vec{P} = \left\{ \frac{7}{10}; \frac{3}{20}; \frac{3}{20} \right\})$$

2.10.  $\vec{a} (2; -2; -1)$  жана  $\vec{e} \left( -1; 1; \frac{1}{2} \right)$  векторлорун коллинеардуу болорун көрсөтүп,  $\vec{a}$  векторун  $\vec{e}$  базистик системасы боюнча ажыратып жазгыла.

(Жообу:  $\vec{a} = -2\vec{e}$ )

2.11.  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{b} = -3\vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  векторлору берилсе, төмөндөгүлөрдү тапкыла:

а)  $\vec{a}$  векторун орту болгон  $\vec{a}_0$  векторун координаталарын;

б)  $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$  векторун координаталарын;

в)  $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$  векторун  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  базистик системасындагы ажыралуусун;

г)  $\text{Pr}_{p_j}(\vec{a} - \vec{b})$  проекциясын.

(Жообу: а)  $\vec{a}_0 \left( \frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}} \right)$ ; б)  $\vec{a} - \frac{2}{1}\vec{b} + \vec{c} = \left\{ 3; \frac{11}{2}; 0 \right\}$

в)  $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = -2\vec{j}$ ; г)  $\text{Pr}_j(a - b) = 6$  )

2.12.  $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$  векторуна коллинеардуу жана  $\vec{j}$  орту менен тар бурч түзгөн, узундугу 15 санына барабар  $\vec{b}$  векторун тапкыла.

(Жообу:  $\vec{b} = -5\vec{i} + 10\vec{j} + \vec{k}$  )

2.13.  $\vec{j}$  - орту менен  $60^\circ$ ,  $\vec{k}$  - орту менен  $120^\circ$  бурчту түзгөн, узундугу  $5\sqrt{5}$  болгон  $\vec{a}$  векторун тапкыла.

(Жообу:  $\vec{a} = \pm 5\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{2}}\vec{j} - \frac{5}{\sqrt{2}}\vec{k}$  )

2.14. Узундуктары  $|\vec{a}_1| = 3$ ,  $|\vec{a}_2| = 5$  болгон эки векторлор аркылуу түзүлгөн  $\vec{a}_1 + \alpha \cdot \vec{a}_2$  жана  $\vec{a}_1 - \alpha \cdot \vec{a}_2$  векторлору,  $\alpha$  нын кандай маанисинде ортогоналдуу болушат? (Жообу:  $\alpha = \pm \frac{3}{5}$  )

2.15.  $\vec{a} = \{6; 7; -6\}$  векторуна параллель болгон  $\vec{a}_0$  бирдик векторун тапкыла.

(Жообу:  $\vec{a}_0 = \left\{ \frac{6}{11}; \frac{7}{11}; -\frac{6}{11} \right\}$  же  $\vec{a}_0 = \left\{ -\frac{6}{11}; \frac{7}{11}; \frac{6}{11} \right\}$  )

2.16.  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  векторун  $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$  векторуна түшүрүлгөн проекциясын тапкыла. (Жообу:  $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{4}{\sqrt{14}}$  )

2.17. Учтары  $A(-4; 0; 4)$ ,  $B(-1; 6; 7)$ ,  $C(1; 10; -9)$  чекиттери болгон  $\vec{AB}$  жана  $\vec{AC}$  векторлорун арасындагы бурчту тапкыла.

(Жообу:  $\cos \varphi = 1$ ,  $\varphi = 0^\circ$  )

2.18. Бир учурда  $\vec{a}$  (3; 6; 8) векторуна жана  $Ox$  огуна перпендикуляр болгон  $\vec{P}_0$  бирдик векторун тапкыла.

(Жообу:  $\vec{P}_0 = \pm \left\{ 0; -\frac{4}{5}; \frac{3}{5} \right\}$ )

2.19.  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$  векторлору менен курулган параллелограммдын диагоналдарын арасындагы бурчтун синусун тапкыла.

(Жообу:  $\sin \varphi = \sqrt{\frac{248}{273}}$ )

2.20.  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$  жана  $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  векторлору менен курулган параллелепипеддин негизинде  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  векторлору жатышат. Параллелепипеддин  $h$  бийиктигин аныктагыла.

(Жообу:  $h = \frac{49}{\sqrt{323}}$ )

### III ГЛАВА. ТҮЗ ЖАНА ТЕГИЗДИК

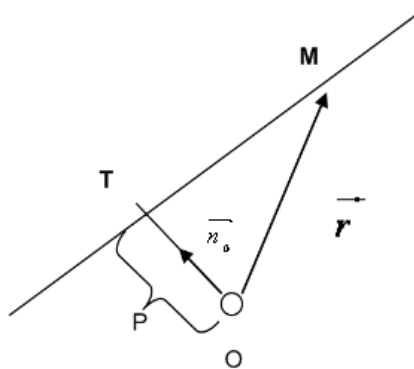
#### §3.1 Тегиздикте жайгашкан түздөр

##### 3.1.1 Түздүн нормалдык жана жалпы теңдемелери

Жаратылыш чөйрөсүн таанып билүүдө түз сызыктарга салыштырып үйрөнүү учурлары көп кездешет. Анткени курчап турган чөйрөдөгү чексиз көп кыймылдар, байкоочу турган чекиттен түз сызыктарга окшоп кыймылдагандай же таралгандай көрүнөт. Ар бир түздүн жанына барып байоого мүмкүнчүлүк болбогондуктан, аларды математикалык тилде жазылган элес-моделдери аркылуу таанып, бири-биринен айырмалаган аттарды коюп үйрөнөбүз. Ааламды таануу байкоочу турган чекиттен жүргүзүлгөндүктөн, түздүн теңдемесин да байкоочу турган  $O$  чекитине салыштырмалуу түзө алабыз. Байкоочу адам турган  $O$  чекити ар кандай тандала бергендиктен, бир эле түз алардын ар биринен ар башка абалда жайгашкандай көрүнөт. Ошондой болсо да, түздүн математикалык модели болгон теңдемесин декарттын координаталар системасында  $O$  башталма чекитине салыштырмалуу түзөбүз, б.а. кандай байкоочу адам болбосун координата башталмасында турат деп элестетебиз.

Тегиздикте жайгашкан кандайдыр бир  $O$  чекитин тандап алып, ага салыштырмалуу ушул эле тегиздикте жайгашкан  $L$  түзүнүн математикалык аталыш модель-теңдемесин же математикалык тилдеги атын жазалы (түзөлү).  $L$  түзүн теңдемесин түзүү үчүн:

1).  $O$  чекитинен  $L$  түзүнө чейинки  $p$  аралыгы же  $O$  чекитинен  $L$  түзүнө түшүрүлгөн перпендикуляр  $OT$  кесиндисинин узундугу  $p = |OT|$ ;



3.1.1.-чийме

2).  $O$  чекитинен  $L$  түзүнө карай багытталган перпендикуляр  $\vec{n}_0$  бирдик вектору  $|\vec{n}_0| = 1$  берилген болушу керек (3.1.1-чийме).

Чынында эле  $L$  түзүнөн каалагандай эркин чекит катарында тандалган  $M(x; y)$  чекитинин  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  радиус – векторун,  $\vec{n}_0$

векторуна түшүрүлгөн проекциясы  $p$  санына барабар болот

$$\text{Pr}_{\vec{n}_0} \vec{r} = p. \quad (1)$$

(1) ди скалярдык көбөйтүү көрүнүшүндө жазып

$$(\vec{n}_0, \vec{r}) = p \text{ же } (\vec{n}_0, \vec{r}) - p = 0, \quad (2)$$

түздүн вектордук формада жазылган нормалдаштырылган (2) теңдемесин алабыз.  $M$  чекити  $L$  түзү боюнча өзгөрүп кыймылдап жүрүүчү чекит болгондуктан, анын радиус - вектору түздүн өзгөрүлмө  $\vec{r}$  радиус - вектору болот. Ошондуктан тегиздиктеги (2) шартын канааттандырган бардык  $M(x; y)$  чекиттеринин геометриялык изи,  $L$  түзүн курат, б.а.  $L$  түзүнүн  $O$  чекитине салыштырмалуу математикалык аталыш-модели (теңдемеси) (2) көрүнүштө жазылат.

$\vec{n}_0 = \{\cos \varphi; \sin \varphi\}$ ,  $\vec{r} = \{x; y\}$  координаталары менен берилгендиктен, скалярдык көбөйтүүнү аткарып, (2) ден түздүн координаттык формадагы

$$x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi - p = 0 \quad (3)$$

көрүнүштөгү нормалдашкан аталыш-теңдемесин түзөбүз.

Жалпы учурда түздүн (3) теңдемеси  $x, y$  өзгөрүлмөлөрүнө карата биринчи тартиптеги сызыктуу теңдеме болот. Экинчи жактан, каалагандай эле  $x, y$  өзгөрүлмөлөрүнө карата түзүлгөн биринчи тартиптеги сызыктуу

$$Ax + By + C = 0, \quad (4)$$

теңдемени, тегиздикте берилген түздүн жалпы аталыш-теңдемеси катарында кабыл алса болот (*мында  $A^2 + B^2 > 0$  же « $A, B$  бир учурда нөл болбойт» деп түшүн*).

(4) теңдемесин чын эле түздүн математикалык модели же жалпы теңдемеси экенин көрсөтүү үчүн, аны (3) нормалдык көрүнүшкө келтирүү керек. Ал үчүн (4) тү турактуу  $\mu \neq 0$  санына көбөйтөбүз:

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0. \quad (5)$$

(5) менен (3) тү салыштырып, нормалдаштыруу үчүн

$$\mu A = \cos \varphi, \quad \mu B = \sin \varphi, \quad \mu C = -p \quad (6)$$

деп алуу жетиштүү болорун байкайбыз. (6) барабардыктарын биринчи экөөсүн квадратка көтөрүп, мүчөлөп кошуудан  $\mu^2 A^2 + \mu^2 B^2 \equiv \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$  же  $\mu^2 (A^2 + B^2) = 1$ , андан кийин

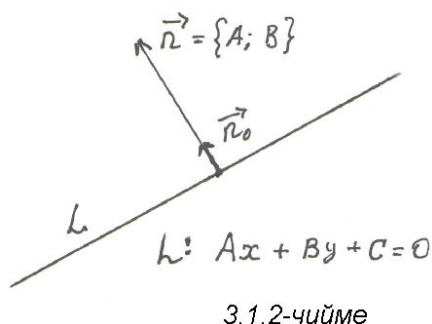
$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (7)$$

келип чыгат.  $\mu C = -P$  белгилөөсүн эске алып, (7) деги  $\mu$  нун белгисин,  $C$  бош мүчөсүнүн белгисине карама - каршы тандоо керектигин көрөбүз.

Ушундай ыкма менен (7) ден табылган нормалдаштыруучу көбөйтүүчү деп аталган  $\mu$  санын (6) га коюп,

$$\cos \varphi = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \varphi = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad P = \mp \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (8)$$

маанилерин туюнтуу менен, түздүн жалпы (4) аталыш-теңдемесин нормалдаштырган абалда (3) көрүнүштө жазууга болоруна ишенебиз.



(4) теңдемесин нормалдашкан абалдагы

вектордук теңдемеси

$$(\vec{r}, \vec{n}) + \mu C = 0 \quad (4^A)$$

көрүнүштө жазылат.

Ошентип,  $Oxy$  координаттык

тегиздигинде (4) теңдемесин

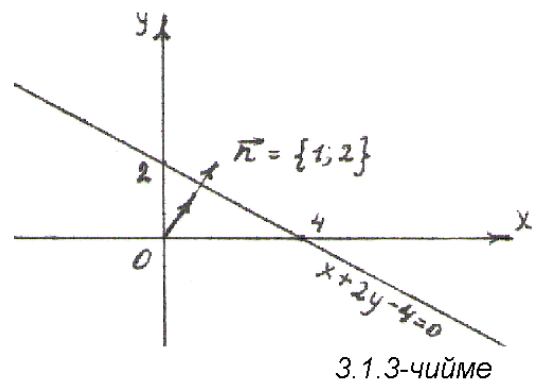
канааттандыруучу каалагандай  $M(x; y)$  чекиттерин көптүгүн изи  $L$  түзүн түзөт.  $L$  түзүнө перпендикуляр  $\vec{n} = \{A; B\}$  вектору түздүн нормалы деп аталат. Бул  $\vec{n}$  нормаль векторун орту бирдик  $\vec{n}_0$  вектору координаталары менен

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \left\{ \cos \varphi; \sin \varphi \right\} = \left\{ \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right\} \quad (9)$$

көрүнүштөрдө жазылып, “ $\pm$ ” белгиси  $C$  бош мүчөсүн белгисине карама - каршы тандалган  $\mu$  нун белгисине жараша, түзгө түшүрүлгөн  $\vec{n}_0$  бирдик нормалдын багытын аныктайт (3.1.2-чийме).

Демек, түздүн (4) жалпы теңдемесиндеги  $A, B$  коэффициенттери  $L$  түзүнүн  $\vec{n}$  нормалдык векторун  $\vec{n} = \{A; B\}$

координаталары болуп, түздүн калган бардык нормалдык векторлору, аны кайсы бир нөлдөн айырмалуу санга көбөйтүү менен табылышат.

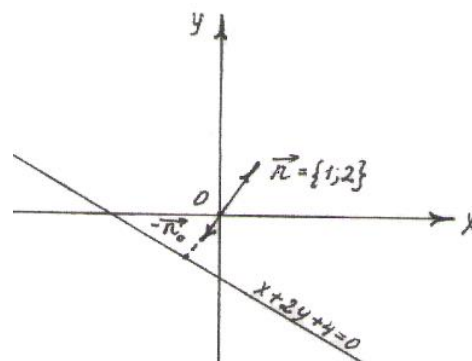




Мисалы,  $x + 2y - 4 = 0$  түзүнө

$\vec{n} = \{1; 2\}$  нормалдык вектор болот (3.1.3-чийме).

Ушул эле  $\vec{n} = \{1; 2\}$  вектору  $x+2y+4=0$  түзүнө да нормалдык вектор болуп, С бош мүчөсүн белгиси өзгөргөндүктөн,  $\vec{n}_0$  бирдик нормаль векторунун багыты өзгөрөт (3.1.4-чийме).



3.1.4-чийме

Практикалык эсептөөлөрдө түздүн (4) жалпы

теңдемесин төмөндөгүдөй эки көрүнүштө жазып жүрүшөт:

1) түздүн  $k$  бурчтук коэффициентин боюнча теңдемеси

$$y = kx + b \quad (10)$$

көрүнүштө жазылат. Чынында эле  $B \neq 0$  болгон учурда (4) тү  $B$  га бөлүп жиберип,

$$\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0 \quad \text{жана} \quad k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B} \quad \text{деп белгилөө менен (10)}$$

көрүнүштөргө келтиребиз.  $k$  - түздүн бурчтук коэффициентин деп аталып,

$Ox$  огу менен  $L$  түзүн арасындагы  $\alpha$  бурчунун тангенсинге барабар  $k = \operatorname{tg} \alpha$  (3.1.5-чийме).  $\alpha$  - түздүн көтөрүлүү бурчу деп аталат.

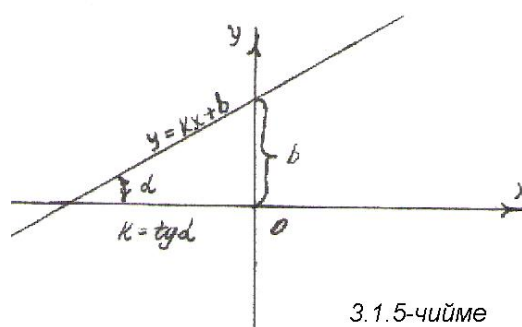
2) Эгерде  $A, B$  коэффициенттери жана  $C$  бош мүчөсү бир учурда нөлгө барабар

болбосо, б.а  $A \cdot B \cdot C \neq 0$ , анда  $a = -\frac{C}{A}$ ,

$b = -\frac{C}{B}$  белгилөөлөрүн жардамы менен

түздүн (4) жалпы теңдемесин

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (10^A)$$



3.1.5-чийме

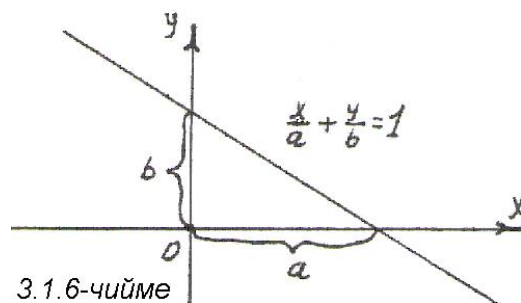
көрүнүшкө келтиребиз.  $(10^A)$  түздүн кесиндилердеги теңдемеси деп аталат (3.1.6-чыйме).

Ошентип түздүн теңдемелери:

а)  $\vec{n}$  нормалдык вектору жана  $C$  бош мүчөсү (же  $p$  саны) белгилүү болгон;

б)  $k$  бурчтук коэффициенттери жана  $b$  саны белгилүү болгон;

в) түздүн координаттык окторду кесүүчү  $(a; 0)$ ,  $(0; b)$  чекиттери белгилүү болгон, учурларын ар биринде гана бир маанилүү түзүлөрүн көрдүк.



### 3.1.2 Тегиздикте берилген чекит аркылуу өтүүчү түздүн, берилген багытка карата теңдемелери

1. Оху координаттык тегиздигинде берилген  $M_0(x_0; y_0)$  чекити аркылуу өтүп, берилген  $\vec{n} = \{A; B\}$  векторуна перпендикуляр болгон  $L$  түзүн теңдемесин түзүү талап кылынсын.

$L$  түзү өтүүчү  $M_0(x_0; y_0)$  чекитинин радиус - вектору  $\vec{r}_0$  болсун, ал эми түздө эркин өзгөрүүчү  $M(x; y)$  чекитин радиус - векторун  $\vec{r}$  дейли (3.1.7-чыйме).

Анда  $\vec{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \{x - x_0; y - y_0\}$  координаталуу вектор да  $\vec{n}$  векторуна перпендикуляр болот.

Перпендикулярдуулук шарты боюнча

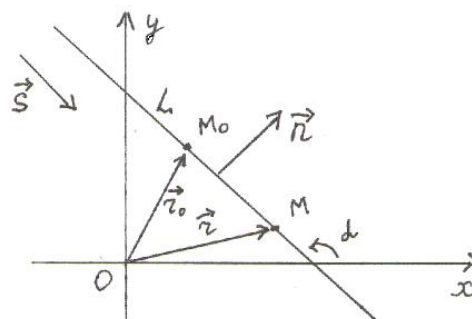
$\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0$  векторлорун скалярдык көбөйтүндүсү нөл санына барабар:

$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$ . Бул шартты координаталары боюнча жазсак

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (11)$$

изделүүчү теңдемеге ээ болобуз. (11) теңдемесин  $k = -\frac{A}{B}$

бурчтук коэффициенттери менен  $y - y_0 = k(x - x_0)$  көрүнүшкө келтирип, түздүн берилген бир чекит аркылуу өтүүчү теңдемесин табабыз.



2. Берилген  $M_0(x_0; y_0)$  чекити аркылуу өтүп, берилген  $\vec{S} = \{a; b\}$  векторуна параллель болгон L түзүн теңдемесин түзөлү (3.1.7-чийме).

L түзүндө эркин кыймылда өзгөрүүчү M чекитин алсак,  $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$  вектору менен  $\vec{S}$  вектору коллинеардуу болушат, б.а. кандайдыр бир t саны (параметри) табылып,  $\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{S}$  же  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{S}$  теңдештиги орун алат. Бул теңдештик, изделүүчү түздүн вектордук формадагы теңдемеси деп аталып, координаталары менен

$$\begin{cases} x - x_0 = ta, \\ y - y_0 = tb \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb \end{cases} \quad \text{көрүнүштөрдө жазылып, түздүн}$$

параметрдик теңдемеси деп аталат. Аны t параметрине карата теңдеп (t

параметрин таштап),  $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$  - түздүн каноникалык теңдемесин

алабыз. Каноникалык теңдемеден  $k = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$  бурчтук коэффициентти менен түздүн теңдемесин

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \quad \text{жана} \quad a \cdot (y - y_0) - b \cdot (x - x_0) \quad (*)$$

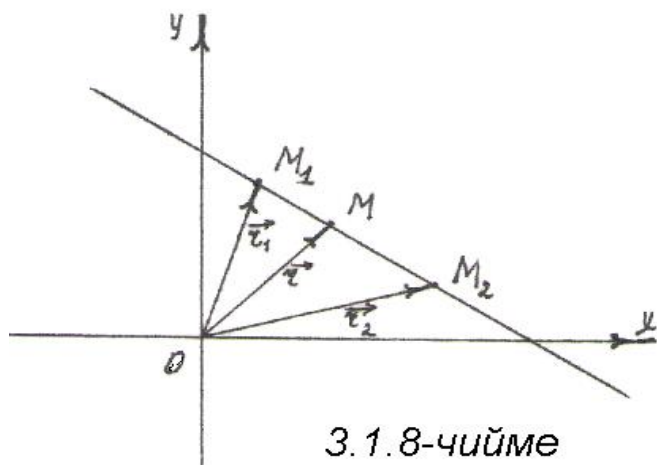
көрүнүштөрдө жазууга болот.

$\vec{S} = \{a; b\}$  вектору L түзүн багыттоочу вектору деп аталып, түздүн жалпы  $Ax + By + C = 0$  теңдемесиндеги коэффициенттерге карата  $\vec{S} = \{-B; A\}$  координаталарына ээ болот. Ошентип түздүн жалпы теңдемеси берилсе, анын нормалдык вектору  $\vec{n} = \{A; B\}$ , багыттоочу вектору  $\vec{S} = \{-B; A\}$  көрүнүштө аныкталат.

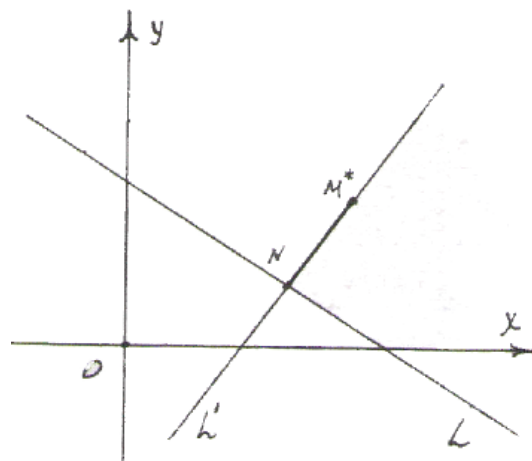
Түздө эркин өзгөрүүчү  $M(x; y)$  чекити  $x, y$  - координаталарынан башка үчүнчү бир  $t$  чоңдугунан көз каранды болгон учурда түздүн параметрдик теңдемеси колдонулат. Мисалы, түз боюнча кыймыл  $t$  убактысынан көз каранды десек, түз  $x = x(t), y = y(t)$  параметрдик теңдемеси менен жазылып, убакыттын ар бир  $t$  моментиндеги  $x, y$  өзгөрүлмөлөрүн абалдарын көрсөтөт.

3. Тегиздикте берилген эки  $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$  чекиттери аркылуу бир гана L түз сызыгы өтөт. Бул түздүн теңдемесин түзөлү (3.1.8-чийме).

L түзүнөн эркин алынган  $M(x; y)$



3.1.8-чийме



3.1.9-чийме

чекитин алсак,  $M_1M = \vec{r} - \vec{r}_1$  жана

$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  векторлору коллинеардуу болушат, б.а  $\lambda$  саны табылып,  $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  теңдештиги орун алат. Бул теңдештикти координаталары менен туюнтуп,

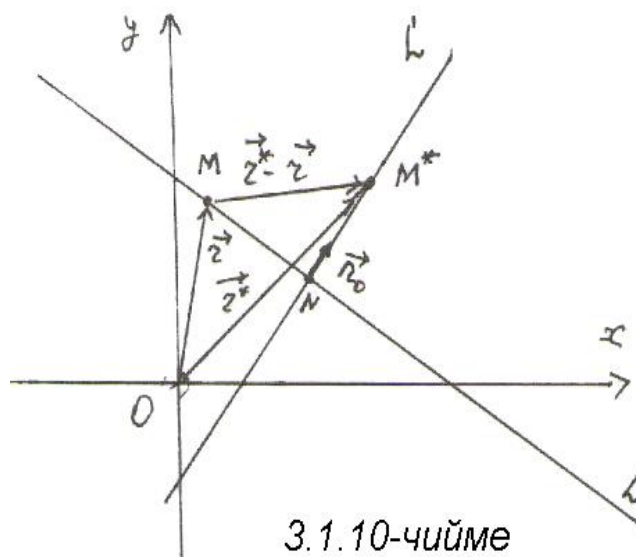
$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1),$$

$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1)$$

ээ болобуз. Аларды  $\lambda$  га карата теңдесек,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (12)$$

эки чекит аркылуу өтүүчү түздүн теңдемеси келип чыгат. Бул учурда пропорционалдуулук коэффициентин болгон  $\lambda \equiv k$  саны, түзгө бурчтук коэффициент болот. м



3.1.10-чийме

### 3.1.3 Тегиздикте берилген түздөн чекитке чейинки аралык

Бир тегиздикте жайгашкан L түзү жана  $M^*(x^*; y^*)$  чекити берилсин (3.1.9-чийме).  $M^*$  чекити L түзүнө таандык болбосун.  $M^*$  чекитинен L түзүнө чейинки аралык деп:  $M^*$  чекити аркылуу өтүп, L түзүнө перпендикуляр  $L'$  түзүнүн  $M^*N$  кесиндисин узундугу болгон  $d = \rho(M^*, L)$  санын айтабыз.

Айталы L түзү

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$

нормалдык теңдемеси менен белгилүү болсун, анда  $d = \rho(M^*, L)$  аралыгы  $\rho(M^*, L) = |x^* \cos \varphi + y^* \sin \varphi - P|$

көрүнүштө табылат.

▷ Чынында эле  $L$  түзүнөн эркин тандалып алынган  $M(x; y)$  чекитин радиус - векторун  $\vec{r}$ , ал эми  $M^*(x^*; y^*)$  чекитин радиус - векторун  $\vec{r}^*$  десек, анда  $\overrightarrow{MM^*} = \vec{r}^* - \vec{r}$  векторунун  $\vec{n}_0$  бирдик вектору менен багытталган  $L^1$  огундагы проекциясы  $\Pi_{P_L}(\vec{r}^* - \vec{r}) = d = \rho(M^*, L)$  аралыгына барабар болот (3.1.10-чийме). Аны скалярдык көбөйтүү түрүндө жазуудан кийин

$$d = (\vec{r}^* - \vec{r}, \vec{n}_0) = (\vec{r}^*, \vec{n}_0) - (\vec{r}, \vec{n}_0) \quad (13)$$

келип чыгат.  $L$  түзүнүн нормалдык (3) теңдемеси берилгендиктен, (2) вектордук теңдемедеги  $(\vec{r}, \vec{n}_0) = p$  теңдештигин эске алып, (13)

$$\text{тү } d = (\vec{r}^*, \vec{n}_0) - p$$

көрүнүшкө келтиребиз. Аны координаталары менен туюнтуудан кийин  $d = \rho(M^*, L) = x^* \cos \varphi + y^* \sin \varphi - P$  санына ээ болобуз, аралык оң сан болгондуктан, анын абсолюттук чоңдугун

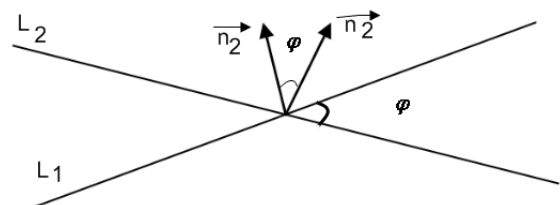
$$\rho(M^*, L) = |x^* \cos \varphi + y^* \sin \varphi - P|, \quad (14)$$

$M^*$  чекитинен  $L$  түзүнө чейинки аралык деп эсептейбиз. ◁

Эгерде  $L$  түзү жалпы  $Ax + By + C = 0$  теңдемеси менен берилсе, (14) формуласын нормалдаштырып,

$$d = \rho(M^*, L) = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (15)$$

көрүнүштө жазабыз.



3.1.11-чийме

### 3.1.4 Эки түздүн арасындагы бурч

Бир тегиздикте жайгашкан эки

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_1^2 + B_1^2 > 0,$$

$$L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad A_2^2 + B_2^2 > 0$$

түздөрү берилсин (3.1.11-чийме).

$L_1$  түзүн нормалдык вектору  $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$  менен  $L_2$  түзүн нормалдык  $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$  векторун арасындагы бурч,  $L_1$  менен  $L_2$  түздөрүн арасындагы бурчка барабар болуп, эки түздүн арасындагы бурч деп аталат. Бул бурчтун косинусу

$$\cos(L_1 \wedge L_2) = \cos \varphi = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \text{ же}$$

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (16)$$

формуласы менен эсептелет.

Эгерде  $L_1$  жана  $L_2$  түздөрү өз ара перпендикуляр болушса  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , анда  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  нормалдык векторлору да өз ара перпендикуляр болуп, скалярдык көбөйтүндүсү нөл санына  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$  тең болот. Бул перпендикулярдык шартын координаталары аркылуу туюнтуп,

$$A_1B_2 + B_1A_2 = 0 \text{ же } \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = -1 \text{ же } \kappa_1 \cdot \kappa_2 = -1 \quad (17)$$

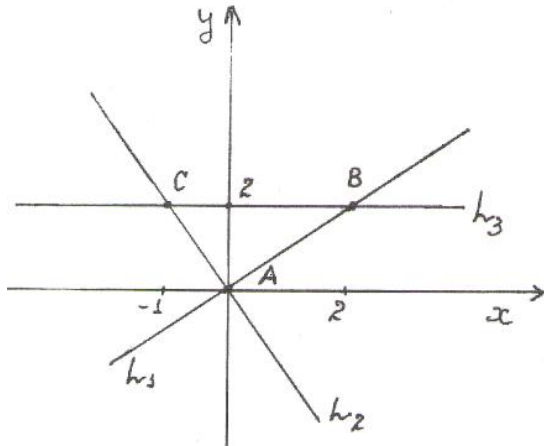
көрүнүштөрдө жазабыз ( $\kappa_1, \kappa_2$  тиешелүү түздөрдүн бурчтук коэффициенттери).

Эгерде  $L_1, L_2$  түздөрү өз ара параллель болушса, анда  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  векторлору коллинеардуу болушуп, бири - бири менен  $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$  байланышында болушат. Бул байланышты координаталары аркылуу туюнтуудан кийин

$$A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2 \text{ же } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ же } \kappa_1 = \kappa_2 \quad (18)$$

эки түздүн параллелдүүлүк шарттары келип чыгат.

## 8. Мисалдар



3.1.12-чыйме

1. Чокулары  $A(0; 0)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(-1; 2)$  чекиттери болгон үч бурчтуктун жактарын теңдемелерин түзгүлө.

**Чыгаруу:**  $\triangleright \triangle ABC$  үч бурчтугун жактары эки чекит аркылуу өтүүчү түздөрдүн кесиндилери болушат (3.1.12-чыйме).

$A$ ,  $B$  чекиттери аркылуу өтүүчү  $L_1$  түзүн теңдемеси (12) формуласына ылайык

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{2-0} \text{ же } y=x \text{ болот.}$$

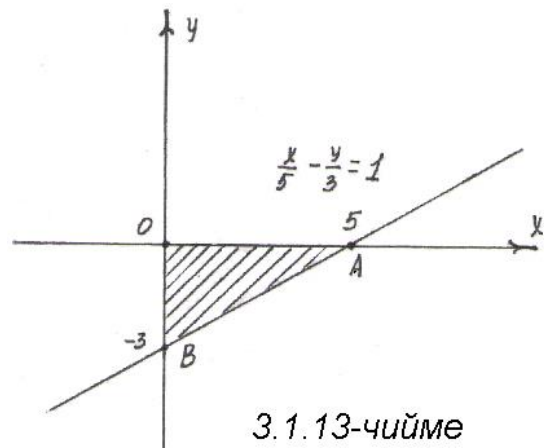
$A$ ,  $C$  чекиттери аркылуу өтүүчү  $L_2$

түзү

$$\frac{x-0}{-1-0} = \frac{y-0}{2-0} \text{ же } y=-2x$$

теңдемесине ээ.  $B$ ,  $C$  чекиттери аркылуу өтүүчү  $L_3$  түзүн теңдемесинде

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-2}{2-2} \text{ же } \frac{x-2}{-3} = \frac{y-2}{0} \text{ болуп,}$$



3.1.13-чыйме

өзгөчө абал пайда болот (бөлчөктүн бөлүмү нөлгө айланды). Бул учурда (12) формуласын бурчтук коэффициенттери менен

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \text{ жазып}$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{-3} = 0, L_3 \text{ түзүнүн } Ox \text{ огуна параллель } y = y_1 \text{ же } y = 2$$

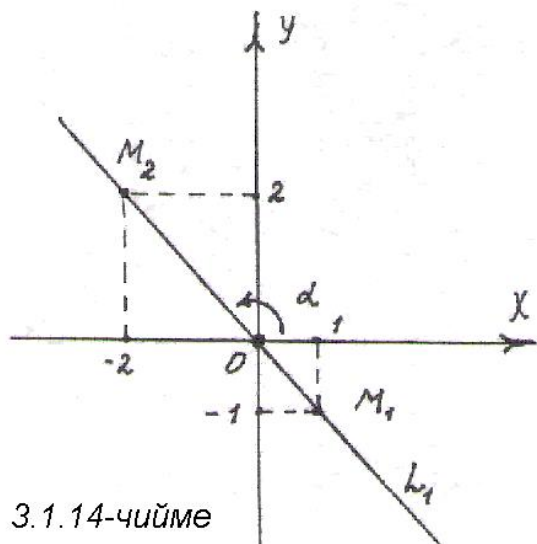
теңдемесин алабыз.  $\triangleleft$

2.  $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$  түзү менен координаттык октордун кесилишинен пайда болгон үч бурчтуктун аянтын тапкыла (3.1.13-чыйме).

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Түздүн кесиндилердеги (10) теңдемеси боюнча  $a=5$ ,  $b=-3$  болгондо түз менен координаттык октордун кесилишинен  $\triangle OAB$  үч бурчтугу пайда болот.  $\triangle OAB$  тик бурчтуу үч бурчтук болуп  $a=5$ ,  $b=-$

3 катеттерине ээ, ошондуктан анын аянты

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}|a| \cdot |b| = \frac{1}{2}|5| \cdot |-3| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ аянт бирдигине барабар. } \triangleleft$$



3.1.14-чийме

3.  $M_1(1; -1)$  жана  $M_2(-2; 2)$

чекиттери аркылуу өткөн  $L$  түзүн  $Ox$  огуна карата жантаюу бурчун тапкыла(3.1.14-чийме).

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Эки чекит аркылуу өтүүчү түздүн (12) теңдемесин пайдаланып

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-(-1)}{2-(-1)} \quad \text{же} \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{3} \quad \text{же}$$

$y = -x$  теңдемесине ээ болобуз. Анын бурчтук коэффициенти  $k = -1$

болгондуктан, түздүн  $Ox$  огу менен түзгөн бурчунун тангенци  $k = \operatorname{tg} \alpha = -1$  же  $\alpha = \operatorname{arctg}(-1) = 135^\circ$  келип чыгат.  $\triangleleft$

4.  $M_0(-1; 3)$  чекити аркылуу өтүп,  $Ox$  огу менен  $45^\circ$  тук жантаюу бурчун түзгөн  $L$  түзүн теңдемесин тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright \alpha = 45^\circ$  болгондуктан,  $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$  бурчтук коэффициенти белгилүү. Бул учурда берилген бир чекит аркылуу өтүүчү түздүн теңдемеси  $y - y_0 = k(x - x_0)$  болуп, изделүүчү түз  $y - 3 = 1 \cdot (x - (-1))$  же  $y = x + 4$  теңдемесине ээ.  $\triangleleft$

5. Багыттоочу вектору  $\vec{m} = \{1; 2\}$  болуп,  $M_0(-1; 3)$  чекити аркылуу өтүүчү түздүн теңдемесин түзгүлө.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Багыттоочу вектору берилип,  $M_0$  чекити аркылуу өтүүчү түздүн (\*) теңдемелерине ылайык, изделүүчү түздүн теңдемеси  $\frac{x - (-1)}{1} = \frac{y - 3}{2}$  же  $x + 1 = \frac{y - 3}{2}$  же  $y = 2x + 5$  көрүнүштөрдө болот.  $\triangleleft$

6.  $M_0(2; 3)$  чекити аркылуу өтүп,  $\vec{S} = (0; 4)$  векторуна параллель түздүн теңдемесин жазгыла жана анын  $\vec{n}_0$  бирдик нормалын тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Изделүүчү түздүн багыттоочу вектору берилгендиктен,



(\*) теңдемелерин пайдалансак,  $\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{4}$  өзгөчө абал келип чыгат.

Ошондуктан анын  $(x-x_0)b - a(y-y_0) = 0$ ,  $\vec{m}(0; 4) = \vec{m}(a; b)$  көрүнүшүн

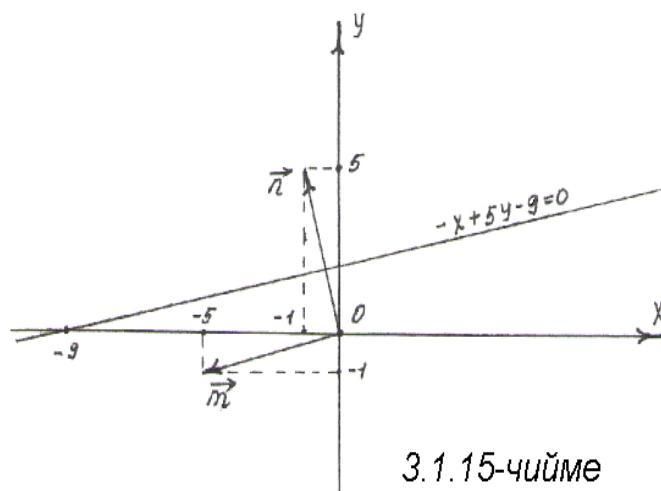
алып, түздүн  $(x-2) \cdot 4 - 0 \cdot (y-3) = 0$   
же  $x-2=0$  теңдемесин алабыз.

$Ax + By + C = 0$  түзүндө нормаль  
вектор  $\vec{n} = \{A; B\}$

координаталарына ээ. Биздин  
учурда  $A=1, B=0, C=-2$  болуп,  
 $\vec{n} = \{1; 0\}$  координаталарына ээ  
жана ал биздин учурда бирдик  
нормаль

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{\vec{n}}{1} = \vec{n}$$

векторуна дал келет экен. <



7.  $M_0(1; 2)$  чекити аркылуу өтүп,  $\vec{n} = \{-1; 5\}$  векторуна перпендикуляр  
түздүн теңдемесин жана  $\vec{m}$  багыттоочу векторун тапкыла.

**Чыгаруу:** > Берилген  $M_0$  чекитинен өтүп,  $\vec{n} = \{A; B\}$  нормаль  
векторуна ээ болгон түздүн теңдемеси (11) формуласына ылайык

$(x-1) \cdot (-1) + (y-2) \cdot 5 = 0$ , же  $-x + 5y - 9 = 0$  көрүнүштө жазылат. Бул  
түздүн багыттоочу вектору  $\vec{m} = \{-B; A\}$  координаталарына ээ  
болгондуктан,  $\vec{m} = \{5; 1\}$  багыттоочу вектору табылат (3.1.15-чыйме). <

8.  $M_0(-1; 2)$  чекити аркылуу өтүп, Ох огуна перпендикуляр түздүн  
теңдемесин жазгыла.

**Чыгаруу:** Түз Ох огуна перпендикуляр жайгашкандыктан, бул октогу  
векторду түздүн  $\vec{n}$  нормалдык вектору катары алууга болот. Нормаль  
деп Оу огунын  $\vec{n} = \{0; 1\}$  ортун алалы. (11) формуласы боюнча

изделүүчү түздүн  $(x-x_0)A+(y-y_0)B=0$  же  $(x+1)\cdot 0+(y-2)\cdot 1=0$  же  $y=2$  көрүнүштөгү теңдемесине ээ болобуз.  $\triangleleft$

9.  $7x+8y-5=0$  түзүнүн бирдик  $\vec{n}_0$  нормаль векторун, бирдик  $\vec{s}_0$  багыттоочу векторун тапкыла.

**Чыгаруу:**  $A=7, B=8, C=-5$  болгондуктан, түздүн нормалдык вектору  $\vec{n}=\{A;B\}=\{7;8\}$  координаталарына ээ. Ал эми анын ортун же бирдик нормаль векторун

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{49+64}} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{113}} \cdot \vec{n}$$

теңдештигинен  $\vec{n}_0 = \left\{ \frac{7}{\sqrt{113}}; \frac{8}{\sqrt{113}} \right\}$  табабыз.

Багыттоочу  $\vec{S} = \{-B;A\} = \{-8;7\}$  векторун орту  $\vec{s}_0 = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|} = \frac{1}{\sqrt{113}} \cdot \vec{S}$  вектору

болуп, координаталары менен  $\vec{s}_0 = \left\{ -\frac{8}{\sqrt{113}}; \frac{7}{\sqrt{113}} \right\}$  көрүнүштө жазылат.  $\triangleleft$

10.  $2x+y-7=0$  жана  $x-y+10=0$  түздөрү берилсе:

а) алардын арасындагы бурчтарды тапкыла;

б) алардын кесилүү чекитинен өтүп,  $3x+2y+7=0$  түзүнө перпендикуляр түздүн теңдемесин жазгыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  а) Эки түздүн арасындагы бурч алардын нормалдык  $\vec{n}_1 = \{A_1;B_1\} = \{2;1\}$  жана  $\vec{n}_2 = \{A_2;B_2\} = \{1;-1\}$  векторлорун арасындагы бурчка барабар. Ошондуктан

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

болуп,  $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 71^\circ$  келип чыгат.

б) Берилген түздөрдүн кесилүү чекити  $M_0(x_0; y_0)$  эки түзгө тең таандык болуп, алардын теңдемелерин канааттандырып,

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - y + 10 = 0 \end{cases} \text{ теңдемелер системасын чечими болот. Теңдемелер}$$

системасын чыгарып  $x_0 = -1, y_0 = 9$  чечимдерине ээ болобуз. Изделүүчү

түз  $M_0(-1; 9)$  чекити аркылуу өтүп,  $3x + 2y + 7 = 0$  түзүнө перпендикуляр болгондуктан, берилген түздүн  $\vec{s}_3 = \{-B_3; A_3\} = \{-2; 3\}$  багыттоочу вектору, izdelүүчү түзгө нормаль вектор  $\vec{n} = \{-2; 3\}$  болот. Демек, izdelүүчү түз (11) формуласын негизинде  $(x - x_0)(-B_3) + (y - y_0)A_3 = 0$  же

$$(x - (-1)) \cdot (-2) + (y - 9) \cdot 3 = 0, \quad \text{же}$$

$$-2x + 3y - 29 = 0 \quad \text{тендемесине ээ. } \triangleleft$$

11.  $x - 2y + 1 = 0$  жана  $2x + y - 3 = 0$  түздөрүнүн арасындагы бурчту аныктагыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Биринчи түздө  $A_1=1, B_1=-2$ , экинчи түздө  $A_2=2, B_2=1$  болгондуктан, түздөр тиешелүү түрдө  $\vec{n}_1 = \{1; -2\}$ ,  $\vec{n}_2 = \{2; 1\}$  нормалдык векторлоруна ээ болуп, алардын арасындагы бурч

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1}{\sqrt{1 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{25}} = \frac{0}{5} = 0,$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \quad \text{болот. } \triangleleft$$

12.  $5x - 7y - 4 = 0$  жана  $3x + 2y - 13 = 0$  түздөрүн өз ара жайланышуу абалдарын изилдегиле.

**Чыгаруу:** Биринчи түздө  $A_1=5, B_1=-7$ , экинчисинде  $A_2=3, B_2=2$  болгондуктан  $\vec{n}_1 = \{5; -7\}$ ,  $\vec{n}_2 = \{3; 2\}$  нормалдык векторлоруна байкоо жүргүзөбүз:

а) перпендикулярдуулук  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$  шартын текшерели.

$5 \cdot 3 + (-7) \cdot 2 = 15 - 14 = 1 \neq 0 \Rightarrow \vec{n}_1, \vec{n}_2$  өз ара перпендикуляр болушпайт.

б) параллелдүүлүк шартын

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{текшерели: } \frac{A_1}{A_2} = \frac{5}{3}, \quad \frac{B_1}{B_2} = -\frac{7}{2} \quad \text{болуп,}$$

параллелдүүлүк шарты аткарылбайт.

в) Берилген түздөр өз ара перпендикуляр да, параллель да эмес, анда алар өз ара кесилишүүчү түздөр болушат.

$$\begin{cases} 5x - 7y - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 13 = 0 \end{cases} \text{ сызыктуу теңдемелер системасын чыгарып, түздөрдүн}$$

кесилишүү чекити  $M_0\left(\frac{98}{31}; \frac{53}{31}\right)$  болорун көрөбүз. Бул кесилишүүчү

түздөрдүн арасындагы бурч

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{5 \cdot 3 + (-7) \cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-7)^2} \sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{74} \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{962}}$$

же  $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{962}}$  болот.  $\triangleleft$

13.  $y = -x - 13$  жана  $y = x - 29$  түздөрүн кесилише тургандыгын далилдегиле.

**Далилдөө:**

$\triangleright$  Берилген түздөрдүн бурчтук коэффициенттери  $k_1 = -1$ ,  $k_2 = 1$  болгондуктан  $k_1 \neq k_2$  болуп, алар өз ара параллель эмес.  $k_1 \cdot k_2 = -1$  болгондуктан алар өз ара перпендикуляр болушат. Демек, алар кесилишүүчү жана арасындагы бурч  $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$  болот.  $\triangleleft$

14.  $O(0; 0)$  чекитинен  $6x + 8y + 10 = 0$  түзүнө чейинки аралыкты тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  (15) формуласына ылайык изделүүчү аралык

$$d = \rho(0, L) = \frac{|6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 10|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{10}{\sqrt{100}} = 1 \text{ санына барабар. } \triangleleft$$

15. Чокулары  $A(1; 0)$ ,  $B(2; 3)$  жана  $C(3; 1)$  чекиттери болгон  $\triangle ABC$  үч бурчтугун  $B$  чокусунан  $AC$  жагына түшүрүлгөн  $BD$  перпендикулярдын узундугун жана  $AD$  кесиндиси узундугун тапкыла (3.1.16-чийме).

**Чыгаруу:**  $\triangleright$   $A(1; 0)$  жана  $C(3; 1)$  чекиттери аркылуу өткөн  $L_1$  түзүн теңдемеси  $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-0}{1-0}$  же  $x - 2y - 1 = 0$  болот. Анын нормалы  $\vec{n}_1 = \{1; -2\}$  вектору,  $BD$  кесиндиси жайгашкан  $L_2$  түзүнө багыттоочу вектор болот. Андай болсо, берилген  $B(2; 3)$  чекити аркылуу өтүүчү  $L_2$  түзүн теңдемесин  $\vec{S}_2 = \{1; -2\}$  багыттоочу векторунун жардамы менен,

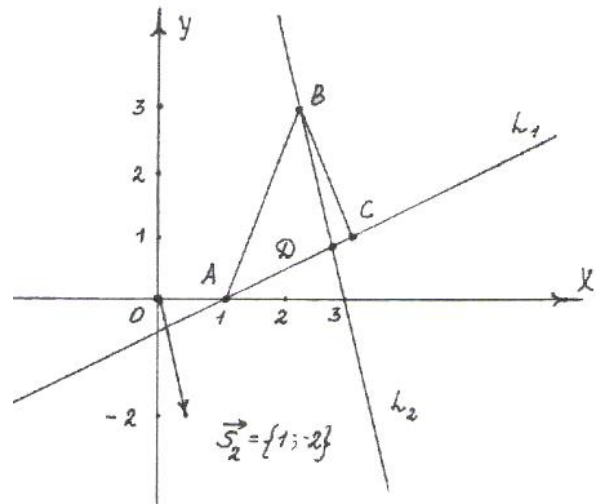
$(x - x_0) b - a (y - y_0) = 0$ ,  $\vec{S} = \{a; b\}$  формуласына таянып,  
 $(x - 2) \cdot (-2) - 1 \cdot (y - 3) = 0$  же  
 $-2x - y + 7 = 0$  көрүнүштө

жазабыз. BD кесиндисин узундугу B чекитинен  $L_1$  түзүнө чейинки аралык катарында

$$\rho(M^*, L_1) = \frac{|A_1 x^* + B_1 y^* + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

формуласы менен,

$$\rho(B, L_1) = \frac{|2 - 2 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$



3.1.16-чийме

көрүнүшүндө эсептелет.

AD кесиндисин узундугу A чекитинен  $L_2$  түзүнө чейинки аралык катары  $\rho(A, L_2) = \frac{|-2 \cdot 1 - 0 + 7|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$  санына барабар болот.  $\triangleleft$

16. Берилген  $L_1: x + 2y - 1 = 0$ ,  $L_2: x + 2y + 2 = 0$  түздөрүн арасындагы аралыктын тең ортосунан өтүүчү, эки түзгө тең параллель  $L_3$  түзүн теңдемесин түзгүлө.

Чыгарууну эки ыкмада жүргүзөлү:

▷ I. Берилген эки түз бир  $\vec{n} = \{1; 2\}$  нормаль векторуна ээ болгондуктан, өз ара параллель болушат. Алардын арасындагы аралыктын тең ортосунда  $M_0(x_0; y_0)$  чекити жайланышкан деп ойлосо,  $\rho(M_0, L_1) = \rho(M_0, L_2)$  келип чыгат.

Демек,  $\frac{|x_0 + 2y_0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|x_0 + 2y_0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$  болуп, нормалдаштыруучу

көбөйтүүчүнүн  $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$  белгиси С бош мүчөсүнүн белгисине

карама - каршы тандалгандыктан,  $\frac{x_0 + 2y_0 - 1}{\sqrt{5}} = -\frac{x_0 + 2y_0 + 2}{\sqrt{5}}$  келип чыгат.

Мындан  $x_0 + 2y_0 - 1 = -x_0 - 2y_0 - 2$  же  $2x_0 + 4y_0 + 1 = 0$  алынат.  $M_0$  чекити  $L_1$  жана  $L_2$  түздөрүнүн арасындагы аралыктын тең ортосунан эркин

тандалгандыктан,  $M_0$  сыяктуу  $M(x, y)$  чекиттерин көптүгү изделүүчү  $L_3$  түзүн түзүп,  $2x + 4y + 1 = 0$  теңдемеси менен жазылат.

**II.** Берилген  $L_1, L_2$  түздөрү жана изделүүчү  $L_3$  түзү өз ара параллель болгондуктан,  $\vec{n} = \{1; 2\}$  үчөөсүнө тең нормалдык вектор болот. Демек,  $L_3$  түзү өтүүчү бир  $M_0(x_0; y_0)$  чекитин таба алсак, анын теңдемесин жаза алабыз. Бул  $M_0$  чекити  $L_1$  жана  $L_2$  түздөрүнөн бирдей аралыкта жайгашкан. Эгерде  $L_1$  түзүнөн  $M_1(1; 0)$  чекитин жана  $L_2$  түзүнөн  $M_2(-2; 0)$  чекиттерин эркин тандасак (бул чекиттер алардын теңдемелерин канааттандыраарын текшерип көрүүгө болот),  $M_0$  чекити  $\overrightarrow{M_1M_2}$  векторун тең ортосунда жайгашкан болот, б.а.

$$\overrightarrow{M_1M_0} = \frac{1}{2} \overrightarrow{M_1M_2}.$$

Бул теңдештикти координаталары менен туюнтуп,

$$\begin{cases} x_0 - x_1 = \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1), \\ y_0 - y_1 = \frac{1}{2} \cdot (y_2 - y_1) \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} x_0 = x_1 + \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-2 - 1) = -\frac{1}{2}, \\ y_0 = y_1 + \frac{1}{2} \cdot (y_2 - y_1) = 0 + \frac{1}{2} \cdot (0 - 0) = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$M_0\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$  чекитин табабыз. (11) формуласы боюнча  $L_3$  түзүнүн теңдемеси

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 1 + (y - 0) \cdot 2 = 0 \quad \text{же} \quad 2x + 4y + 1 = 0 \quad \text{болот.} \triangleleft$$

17. Чокулары  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$  чекиттери болгон үч бурчтуктун аянтын эсептегиле.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$   $\triangle ABC$  үч бурчтугун  $A$  чокусунан  $BC$  жагына  $h$  бийиктигин түшүрөлү. Анда  $h$  бийиктиги  $A$  чекитинен  $BC$  жагы аркылуу өтүүчү түзгө чейинки аралыкка барабар  $h = \rho(A, (BC))$ .  $(BC)$  түзүн теңдемесин эки  $B, C$  чекиттери аркылуу өтүүчү түз катарында

$$\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_3 - y_2} \quad \text{же}$$

$$(x - x_2)(y_3 - y_2) - (y - y_2)(x_3 - x_2) = 0 \quad \text{көрүнүштө жазып, (11) теңдемесине}$$

салыштырып, акыркы түзгө  $\vec{n} = \{y_3 - y_2, -(x_3 - x_2)\}$  нормаль вектор болорун көрөбүз. Демек,

$$h = \rho(A, (BC)) = \frac{|(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) - (y_1 - y_2)(x_3 - x_2)|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}, \quad |\overline{BC}| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \quad \text{болуп,}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} h \cdot |\overline{BC}| = \frac{1}{2} |(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) - (y_1 - y_2)(x_3 - x_2)| \quad \text{Үч бурчтуктун аянтын табабыз. } \triangleleft$$

### Тапшырма

1. Төмөндөгү берилгендер боюнча түздүн теңдемесин түзгүлө:

а)  $O(0,0)$  жана  $M(2;-5)$  чекиттери аркылуу өткөн;

б) бурчтук коэффициентинин  $k = \frac{2}{3}$  болуп,  $A(0,4; -1\frac{3}{5})$  чекитинен өткөн;

в)  $Ox$  огуна  $45^\circ$  бурч менен көтөрүлүп,  $M(-3; 1)$  чекити аркылуу өткөн.

г)  $Ox$  огуна параллель болуп,  $A(-4,7; 3,1)$  чекити аркылуу өткөн;

д)  $A(-10; 4)$  чекити аркылуу өтүп,  $5x + 4y - 6 = 0$  түзүнө параллель болгон;

2.  $A(1; 3;-2)$  жана  $B(7;-4, 4)$  чекиттери аркылуу өткөн түздүн теңдемесин түзүп, декарттык координаталар системасында сүрөттөгүлө.

3.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 9 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{түздөрү кесилишеби же жокпу?}$$

4.  $Ox$  огуна  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\varphi = 60^\circ$ ,  $\varphi = 0^\circ$  бурчтары менен көтөрүлүп ( $k = \tan \varphi$ ),  $B(5; -2)$  чекити аркылуу өткөн түздөрдү тургузуп, бурчтук коэффициенттин маанисин түшүндүргүлө.

5.  $Ox$  менен  $Oy$  окторуна параллель жана перпендикуляр түздөрдүн теңдемелерин түзүп, алардын айырмачылыктарына маани бергиле.

6.  $M(2; -5; 3)$  чекити аркылуу төмөндөгүдөй шарттарда жүргүзүлгөн түздөрдүн теңдемесин түзгүлө:

а)  $Oz$  огуна параллель түздүн;

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{түзүнө параллель түздүн.}$$

$$\left( \text{жообу} \quad \text{а) } \frac{x-2}{0} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-3}{1} \quad \text{же} \quad \begin{cases} x-2=0, \\ y+5=0; \end{cases} \quad \text{б) } \frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}; \right)$$

### 3.1.5 Полярдык координаталар системасындагы түздүн теңдемеси

L түзүнүн полярдык координаталар системасындагы математикалык моделин (теңдемесин) түзүүдө эки учурга токтолобуз:

а) Түз координата башталмасы  $O(0;0)$  чекити аркылуу өтүп,  $Ox$  огу менен  $\varphi$  оң бурчун түзсүн. Бул учурда изделүүчү түздүн бурчтук коэффициенттери  $k = \operatorname{tg}\varphi$ , полярдык координаталар системасындагы түздүн теңдемеси болот.

б) Түз координаталар башталмасы аркылуу өтпөсүн дейли, анда анын нормалдашкан  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$  теңдемесине полярдык  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  маанилерин коюп,  $r \cos \varphi \cos \alpha + r \sin \varphi \sin \alpha - p = 0$  же  $r \cdot \cos(\varphi - \alpha) = p$  же  $r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$  көрүнүштөгү түздүн полярдык координаталар системасындагы теңдемесине ээ болобуз.

Түздүн полярдык координаталар системасында жазылган теңдемесин башка усул менен да табууга болот. Ал үчүн түздөн  $O$  башталмасына чейинки  $p = |OA|$  аралыгы жана  $Ox$  огу менен  $OA$  кесиндисинин түзгөн оң  $\alpha$  бурчу белгилүү болушу керек (3.1.17-чийме).

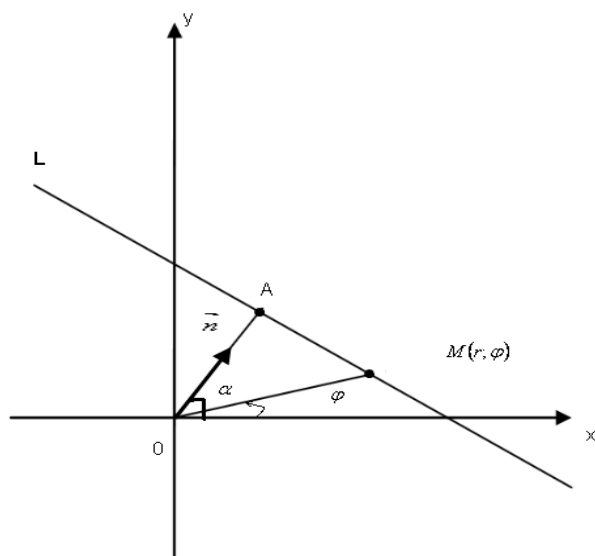
Бул учурда түздө эркин кыймылда өзгөргөн  $M(r; \varphi)$  чекитине карата

$$\operatorname{Pr}_{\vec{n}} \vec{OM} = p \text{ жана}$$

$$\operatorname{Pr}_{\vec{n}} \vec{OM} = |\vec{OM}| \cos(\alpha - \varphi) = r \cos(\varphi - \alpha)$$

маанилерин табабыз.  $\operatorname{Pr}_{\vec{n}} \vec{OM}$  дин жогоруда табылган эки маанилерин теңдештирип,  $r$  ди аныктап түздүн полярдык координаталардагы

$$r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)} \text{ теңдемесине ээ болобуз.}$$



3.1.17.-чийме

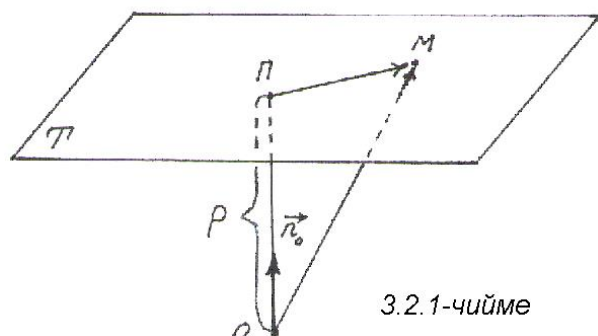
## §3.2 Тегиздик

### 3.2.1 Тегиздиктин нормалдык жана жалпы теңдемеси

$R^3$  мейкиндигинде жайгашкан  $T$  тегиздиктин теңдемеси, байкоочу турган  $O$  чекитине салыштырмалуу түзүлөт. Ал үчүн  $O$  чекитинен тегиздикке чейинки аралык, б.а.  $O$  чекитинен



тегиздикке түшүрүлгөн перпендикуляр ОП кесиндисин узундугу  $p$  саны жана  $O$  чекитинен  $T$  тегиздигине карата багытталган  $\vec{n}_0$  бирдик нормаль вектору белгилүү болушу керек (3.2.1-чийме).



3.2.1-чийме

$T$  тегиздигинде эркин кыймылдаган  $M(x; y; z)$  чекитин алалы, анын  $\vec{OM} = \vec{r} = \{x; y; z\}$  радиус – вектору болсун.  $M$  чекити  $T$  тегиздигин кайсы жеринде жайгашкандыгына карабай,  $\vec{r}$  радиус – векторун  $\vec{n}_0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$  нормалына түшүрүлгөн проекциясы  $p$  санына барабар болорун байкайбыз

$$\text{Pr}_{\vec{n}_0} \vec{r} = p.$$

Бул теңдештик  $T$  тегиздигиндеги бардык чекиттер үчүн туура болгондуктан, аны скалярдык көбөйтүүнүн жардамы менен

$$(\vec{r}, \vec{n}_0) - p = 0 \quad (19)$$

көрүнүштөгү жазылышы,  $T$  тегиздигин вектордук формадагы нормалдык теңдемеси деп аталат. Аны координаталары боюнча

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0 \quad (20)$$

жазып, тегиздиктин координаталык формада жазылган (20) нормалдык аталыш теңдемесин алабыз. Бул (20) теңдеменин негизги өзгөчөлүгү катарында:

1.  $x, y, z$  кыймылдуу өзгөрүлмөлөрүн коэффициенттерин

квадраттарынын суммасы  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  болорун;

2. Бош мүчөсү  $(-p)$  оң сан болбосун, эсептейбиз.

Тегиздиктин (20) нормалдык теңдемеси  $x, y, z$  өзгөрүлмөлөрүнө карата биринчи тартиптеги алгебралык теңдеме болот. Ошондуктан жалпы учурда, каалагандай эле түздүн атын төмөндөгү

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (A^2 + B^2 + C^2 > 0) \quad (21)$$

( $A^2 + B^2 + C^2 > 0$  шартын  $A, B, C$  коэффициенттери бир учурда нөл болбойт деп түшүнөбүз) сызыктуу алгебралык теңдеме көрүнүштө жазып, кайсы бир тегиздиктин дарегин көрсөтүүчү теңдеме деп түшүнөбүз. Тегиздиктин жалпы аталыш теңдемеси (21) көрүнүштө болорун далилдөө үчүн, аны (20) көрүнүшкө келтирүү мүмкүнчүлүгүн көрсөтүү жетиштүү.

▷ (21) теңдемесин нормалдаштыруучу көбөйтүүчү деп аталган  $\mu$  санына ( $\mu \neq 0$ ) көбөйтүп,  $\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$  ээ болобуз. Аны (20) теңдемеси менен салыштырып,

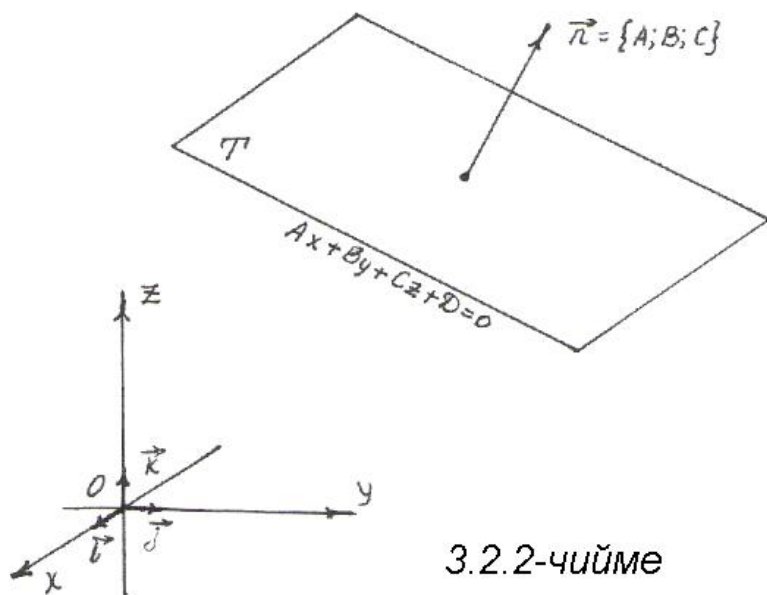
$$\mu A = \cos \alpha, \quad \mu B = \cos \beta, \quad \mu C = \cos \gamma, \quad \mu D = -p \quad (22)$$

теңдештиктерин түзөбүз. (22) барабардыктарын алгачкы үчөөсүн квадратка көтөрүп, мүчөлөп кошуп,

$$\mu^2 A^2 + \mu^2 B^2 + \mu^2 C^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \quad \text{же} \quad \mu^2 (A^2 + B^2 + C^2) = 1 \quad \text{же}$$

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (23)$$

нормалдаштыруучу көбөйтүүчү болгон  $\mu$  санын табабыз.  $\mu \cdot D = -p \leq 0$  болгондуктан,  $\mu$  нун белгисин,  $D$  бош мүчөсүн белгисине карама – каршы тандайбыз.



3.2.2-чийме

Табылган  $\mu$  ну (22) ге коюп,

$$\cos \alpha, \quad \cos \beta, \quad \cos \gamma, \quad p$$

сандарын аныкталган маанилерин (20) га койсок, тегиздиктин жалпы көрүнүштөгү (21) теңдемеси нормалдашкан көрүнүшкө келет. ◁

Ошентип, жалпы көрүнүштөгү

тегиздиктин (21) теңдемесинин вектордук формадагы нормалдашкан теңдемеси

$$(\vec{r}, \vec{n}) + \mu D = 0$$

көрүнүштө жазылып,  $\vec{n} = \{A; B; C\}$  вектору тегиздикке нормалдык вектор болот, анын орту

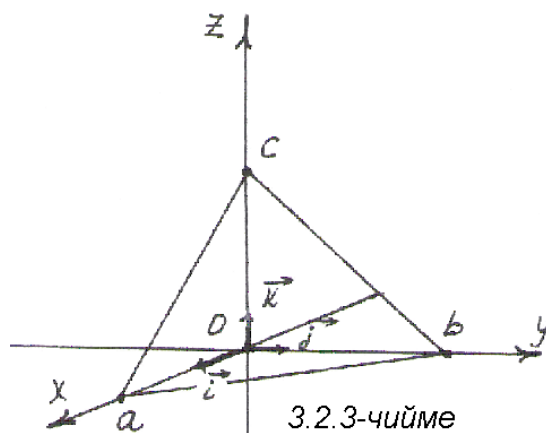
$$\vec{n}_0 = \{\mu A; \mu B; \mu C\} = \left\{ \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right\} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$$

көрүнүштөрдө жазышат. Мындагы “ $\pm$ ” белгисин бири алынып, ал D бош мүчөсүн белгисине карама – каршы белги катарында тандалып,

бирдик  $\vec{n}_0$  нормаль – векторун багытын көрсөтөт. Демек,

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

тегиздиктин жалпы учурдагы теңдемеси, ал эми  $\vec{n} = \{A; B; C\}$  анын нормаль – вектору болуп (3.2.2-чийме), калган бардык нормаль – векторлор,



аны кайсы бир нөлдөн айырмалуу санга көбөйтүү менен алынат.

Эгерде  $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$  же A, B, C, D сандарын баары нөлдөн айырмалуу болсо,

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}$$

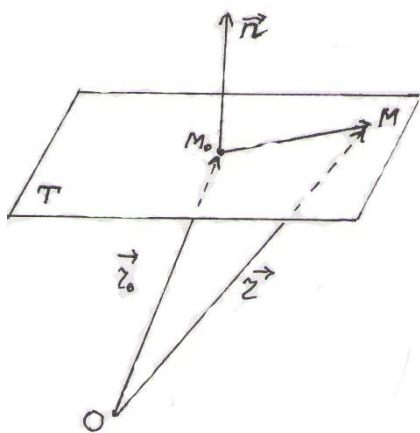
белгилөөлөрүн киргизип, тегиздиктин кесиндилердеги

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (24)$$

теңдемесин алабыз (3.2.3-чийме).

### 3.2.2 Берилген чекит аркылуу өтүүчү тегиздиктин, берилген багыттарга карата теңдемесин түзүү

1. Берилген  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  чекити аркылуу өтүп,  $\vec{n} = \{A; B; C\}$  векторуна перпендикуляр болуучу T тегиздигин теңдемесин түзүү талап кылынсын. T тегиздигинде өзгөрүп жүрүүчү каалагандай бир  $M(x; y; z)$  чекитин алалы.



3.2.4-чийме

$\overrightarrow{OM}_0 = \vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ ,  $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \{x; y; z\}$  радиус - векторлору десек, анда  $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$  вектору  $\vec{n}$  векторуна перпендикуляр болуп, экөөнүн скалярдык көбөйтүндүсү  $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$  нөл саны болот (3.2.4-чийме). Бул перпендикулярдуулук шартын координаталары менен жазып, берилген  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  чекити аркылуу өткөн,  $\vec{n}$  векторуна перпендикуляр T тегиздигин  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$  (25)

теңдемесине ээ болобуз.

## 2. Мейкиндикте берилген

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ ,  $M_3(x_3; y_3; z_3)$  чекиттери эки - экиден бир түзгө таандык болсо да, үчөө тең бир учурда бир түзгө таандык болбогон чекиттер болушсун дейли. Ушундай шарттарда тандалган каалагандай үч чекит аркылуу бир гана тегиздик түзүүгө болот.

Бул үч чекит аркылуу өтүүчү T тегиздигинин теңдемесин келтирип чыгаруу үчүн, T тегиздигинде жайгашкан эркин кыймылда өзгөрүүчү  $M(x; y; z)$  чекитин алабыз. Ошентип T тегиздигине  $M_1, M_2, M_3, M$  чекиттерин төртөөсү тең таандык деп эсептейбиз. Бул учурда  $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$  векторлору бир тегиздикте жайгашып, компланардуу векторлор тобун түзүшөт. Компланардуу векторлордун аралаш көбөйтүндүсү нөл санына барабар

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0. \quad (26)$$

Векторлордун координаталары менен жазып,

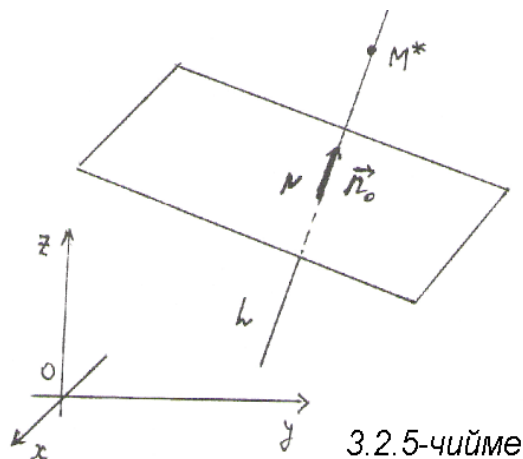
$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}, \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

(26) аралаш көбөйтүүнү аткарсак,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

көрүнүштөгү берилген үч чекит аркылуу түзүлгөн  $T$  тегиздигинин теңдемесин алабыз. Үчүнчү тартиптеги аныктагычты эсептөө эрежесин колдонуп, тегиздиктин (27) теңдемесин (21) көрүнүштөгү жалпы жазылууга келтирүүгө болот.



3.2.5-чийме

### 3.2.3 Чекиттен тегиздикке чейинки аралык

$T$  тегиздиги жана андан обочо жайланышкан  $M^*(x^*; y^*; z^*)$  чекити берилсин (3.2.5-чийме).

**3.2.1 Аныктама.**  $M^*$  чекитинен  $T$  тегиздигине чейинки аралык деп,  $M^*$  чекитинен  $T$  тегиздигине түшүрүлгөн перпендикуляр  $L$  түзүн  $M^*N$  кесиндисинин узундугу болгон  $d = \rho(M^*, T)$  санын айтабыз.

Эгерде  $T$  тегиздиги  $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0$  нормалдык теңдемеси менен, ал эми  $M^*(x^*; y^*; z^*)$  чекити координаталары менен берилсе, анда  $M^*$  чекитинен  $T$  га чейинки аралык

$$d = \rho(M^*, T) = |x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma - p| \quad (28)$$

санына барабар болот.

▷ (28) ди далилдөө үчүн  $T$  тегиздигинде эркин кыймылда өзгөрүүчү  $M(x; y; z)$  чекитин алабыз.  $\vec{r} = \vec{OM}$ ,  $\vec{r}^* = \vec{OM}^*$  радиус векторлорун айырмасы болгон  $\vec{r}^* - \vec{r} = \vec{MM}^*$  векторун,  $\vec{n}_0 = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$  вектору менен багытталган  $L$  түзүндөгү проекциясы:  $d = \rho(M^*, T)$  узундугуна барабар, б.а.

$$\rho(M^*, T) = \text{Pr}_L(\vec{r}^* - \vec{r}).$$

Проекцияны скалярдык көбөйтүүнүн жардамы менен жазып,  $\rho(M^*, T) = (\vec{r}^* - \vec{r}, \vec{n}_0) = (\vec{r}^*, \vec{n}_0) - (\vec{r}, \vec{n}_0)$  ээ болобуз. (19) боюнча  $(\vec{r}, \vec{n}_0) = p$  маанисин коюп, аралык оң сан болгондуктан абсолюттук чоңдугу менен

алынган  $\rho(M^*, T) = \left| (r^*, n_0) - p \right|$  узундукту табабыз. Аны координаталары менен жазсак (28) келип чыгат.

Жалпы учурда (21) теңдемеси менен берилген  $Ax + By + Cz + D = 0$ ,  $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$  тегиздигинен  $M^*$  чекитине чейики аралык, анын нормалдаштырылган теңдемеси боюнча

$$d = \rho(M^*T) = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (29)$$

формуласы менен эсептелет.  $\triangleleft$

### 3.2.4 Тегиздиктердин арасындагы бурч

Берилген

$$T_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$$

жана

$$T_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$$

тегиздиктерин арасындагы бурч катарында  $T_1, T_2$  экөөсүнүн кесилишинен пайда болгон эки грандуу жандаш бурчтардын экөөсүнүн каалаган бирин алабыз (3.2.6 – чийме).

$T_1$  жана  $T_2$  тегиздиктери параллель болуп калса, анда алардын арасындагы бурч  $0^\circ$  ка тең болот. Бул эки грандуу жандаш бурчтардын бири тегиздиктердин  $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ ,  $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$  нормаль – векторлорун арасындагы  $\varphi = \angle \vec{n}_1, \vec{n}_2$  бурчуна барабар. Ошондуктан эки тегиздиктин арасындагы бурч катарында алардын нормалдык векторлорун арасындагы бурчту кабыл алып,

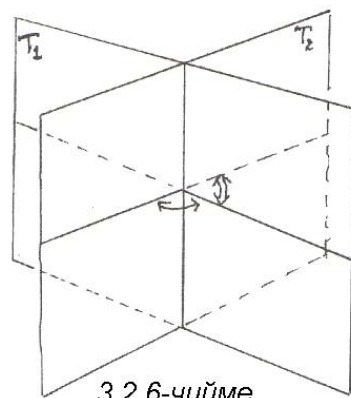
$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (30)$$

формуласы менен эсептейбиз.

(30) формуласынан эки тегиздиктин перпендикулярдуулук шарты

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0 \quad \text{же} \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (31)$$

келип чыгат.



Эки тегиздиктин параллелдүүлүк шарты  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  векторлорун коллинеардуу экендигинен же  $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$  шартынын аткарылышынан келип чыгат. Акыркы теңдештикти координаталары боюнча жазып,

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2 \quad \text{же} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (32)$$

көрүнүштөгү эки тегиздиктин параллелдүүлүк (32) шартына ээ болобуз.

### §3.3 Мейкиндиктеги түздөр

#### 3.3.1 Түздүн жалпы теңдемеси

$R^3$  мейкиндигинде жайгашкан каалагандай  $L$  түзүн кандайдыр бир  $T$  тегиздигине таандык деп түшүнөбүз. Ошондуктан  $L$  түзүндө жайгашкан каалагандай  $M(x; y; z)$  чекити  $T$  тегиздигин (21) көрүнүштөгү  $Ax + By + Cz + D = 0$  жалпы теңдемесин канааттандырат, б.а. мындай чекиттердин көптүгүн изинен куралган  $L$  түзү да, ушул эле (21) теңдемеси менен берилет. Бирок,  $T$  тегиздигинде  $L$  сыяктуу чексиз көп түздөр жайгашып, аларга таандык чекиттер да тегиздиктин (21) теңдемесин канааттандырышат. Ошондуктан  $T$  тегиздигинин (21) жалпы теңдемеси, бир эле учурда ушул тегиздикте жатышкан чексиз көп түздөрдүн теңдемелери болуп,  $T$  тегиздиги ошол чексиз көп түздөрдөн куралган деп түшүнөбүз.

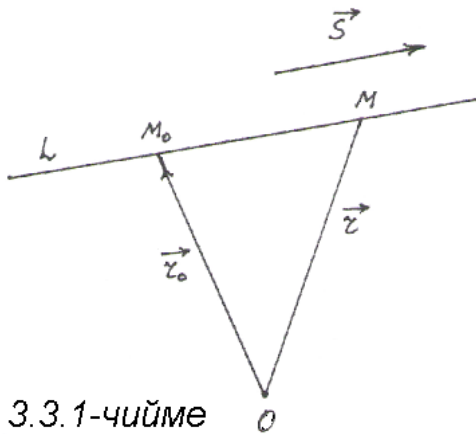
Ошентип  $R^3$  мейкиндигинде конкреттүү бир  $L$  түзүнүн теңдемеси да  $x, y, z$  өзгөрүлмөлөрүнөн көз каранды болуп, тегиздиктин теңдемесине окшош сызыктуу теңдеме менен берилет. *Мейкиндикте берилген каалагандай  $L$  түзүн, эки  $T_1, T_2$  тегиздиктерин кесилишүү сызыгы деп эсептейбиз.* Ошентип мейкиндиктеги өз ара параллель болушпаган каалагандай  $T_1, T_2$  эки тегиздиги кесилишип, бир  $L$  түзүн аныктайт. Ошондуктан түздүн жалпы теңдемеси эки кесилишүүчү тегиздиктердин теңдемелеринен турган

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + O_1 = 0, & (T_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + O_2 = 0 & (T_2) \end{cases} \quad (33)$$

система көрүнүштө жазылат. Мейкиндикте түз менен тегиздиктин теңдемелерин айырмалоо максатында, көбүнчө түздүн каноникалык теңдемесин колдонобуз.

### 3.3.2 Мейкиндикте берилген чекитке жана багытка карата түздүн теңдемелерин түзүү

1. Мейкиндикте берилген  $M_0(x_0; y_0; z_0)$



3.3.1-чийме

чекити аркылуу өтүп, берилген  $\vec{s} = \{a; b; c\}$  векторуна параллель  $L$  түзүнүн теңдемесин түзүү үчүн,  $L$  түзүнөн  $M_0$  чекитинен башка, экинчи бир эркин кыймылда өзгөргөн  $M(x; y; z)$  чекитин алалы.  $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$  вектору  $L$  түзүндө жайгашкан вектор катарында  $\vec{s}$  векторуна

коллинеардуу болот (3.3.1-чийме).

Демек, коллинеардуулук шарты боюнча кандайдыр бир  $t$  саны (параметри) табылып,  $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s}$  же  $\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{s}$  теңдештиги аткарылат.

Бул теңдештикти  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}$  көрүнүштө жазып, аны  $L$  түзүнүн вектордук формадагы теңдемеси деп эсептейбиз. Аны координаталары менен туюнтуп,  $L$  түзүнүн  $t$  параметрине карата түзүлгөн

$$\begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb, \\ z = z_0 + t \cdot c \end{cases} \quad (34)$$

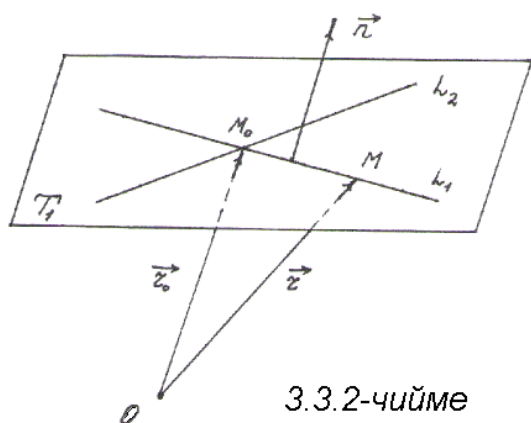
параметрдик теңдемесин алабыз.  $L$  түзү боюнча эркин кыймылдаган  $M(x; y; z)$  чекитинин өзгөрүлмө  $x, y, z$  координаталары, төртүнчү бир  $t$  чоңдугунан көз каранды болгон учурда (мисалы,  $t$  убактысынан), түздүн теңдемеси параметр деп аталган төртүнчү  $t$  чоңдугуна карата

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \quad (34^A)$$



түзүлөт. (34) теңдемелерин  $t$  га карата чыгарып, теңдештирип ( $t$  параметрин жоюштуруп),

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (35)$$



$L$  түзүнүн каноникалык (35) теңдемесине ээ болобуз. Ошентип мейкиндикте бир  $M_0$  чекити аркылуу өтүп,  $\vec{s} = \{a; b; c\}$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 > 0$  (же  $a, b, c$ , коэффициенттери бир мезгилде нөл болбойт) багыттоочусуна ээ болгон  $L$  түзүнүн бир маанилүү, бир гана теңдемеси

түзүлөт.

2. Берилген  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  чекитинен өтүүчү, берилген  $\vec{n} = \{A; B; C\}$  векторуна перпендикуляр  $L_1$  түзүнүн бир маанилүү теңдемесин түзүүгө болобу? - деген суроо туулат (3.3.2-чыйме).

Мейкиндикте жайгашкан  $L_1$  түзү аркылуу чексиз көп тегиздиктер өткөндүктөн, алардын бирөөсү болгон  $T_1$  тегиздиги табылып,  $T_1 \perp \vec{n}$  шарты аткарылат,  $T_1$  тегиздигиндеги  $L_1, L_2, \dots$  сыяктуу бардык чексиз көп түздөргө  $\vec{n}$  вектору перпендикуляр болот. Демек  $M_0$  чекитинен өткөн,  $\vec{n}$  векторуна перпендикуляр чексиз көп түздөр бар, бул түздөрдүн теңдемеси перпендикулярдуулуктун  $(\vec{M_0M}, \vec{n}) = 0$  шартынан келип чыгып,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (36)$$

көрүнүштө болот. Бирок, (36) бир гана  $L_1$  түзүн теңдемеси болбостон, чексиз көп  $L_1, L_2, \dots$  сыяктуу түздөргө да теңдеме боло алат. Андай болсо, (36) теңдемеси бир чекит аркылуу өтүүчү чексиз көп түздөрдүн теңдемеси катарында эсептелип, түздү бир маанилүү аныктай албайт, аны түздүн теңдемеси дебестен,  $T_1$  тегиздигин теңдемеси деп эсептейбиз.

### 3.3.3 Түздүн теңдемелерин каноникалык көрүнүшкө келтирүү

1.  $R^3$  мейкиндигинде  $L$  түзү (33) жалпы теңдемеси менен берилсин дейли. Бул теңдемени (35) каноникалык түргө келтирүү үчүн,  $L$  түзүндө жайгашкан бир  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  чекитин жана багыттоочу  $\vec{s}\{a; b; c\}$  векторун билүү жетиштүү.

$T_1, T_2$  тегиздиктерин кесилишинде жайгашкан жана берилген  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  чекити аркылуу өтүүчү  $L$  түзүнүн жалпы теңдемеси

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & (T_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (T_2) \end{cases} \quad (33)$$

көрүнүшүндө жазылат. (33) теңдемеден  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  чекитин координаталарын аныктайбыз. Ал үчүн өзгөрүлмөлөрдүн бирөөсүн эркин тандап, калган экөөсүн эки белгисиздүү эки теңдемелер системасын чечимдери катарында аныктайбыз. Натыйжада  $x_0; y_0; z_0$  өзгөрүлмөлөрүн бирөөсү каалагандай эркин алынган сан, калган экөөсү ушул алынган санга жараша табылган (33) теңдемелер системасын чечимдери болушат.

$T_1$  жана  $T_2$  тегиздиктерин кесилишүү сызыгы катарында аныкталган  $L$  түзүнүн багыттоочу  $\vec{s}$  вектору,  $L$  түзү менен кошо  $T_1$  жана  $T_2$  тегиздиктерине да параллель болуп, алардын  $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ ,  $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$  нормалдык векторлоруна перпендикуляр

болот. Ошондуктан багыттоочу  $\vec{s}$  вектору катарында  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  векторлорун вектордук көбөйтүндүсү болгон  $\vec{s} = \left[ \vec{n}_1, \vec{n}_2 \right]$  векторун алууга болот.

Ошентип, түздүн (33) жалпы теңдемесинен  $M_0$  чекитин жана багыттоочу  $\vec{s}$  векторлорун аныктап, (33) теңдемесин (35) каноникалык көрүнүшкө келтире алабыз.

Мисалы, 1.  $\begin{cases} x - y + z - 3 = 0, \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$  жалпы теңдемеси менен берилген

түздүн теңдемесин каноникалык көрүнүшкө келтирели.  $z$  өзгөрүлмөсүн

эркин тандап  $z_0 = 0$  дейли, анда  $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y - 1 \end{cases}$  теңдемелер системасына ээ

болуп  $x_0 = 1, y_0 = -2$  чечимдерин табабыз. Демек, берилген түз  $M_0(1; -2; 0)$

чекити аркылуу өтөт. Түздүн теңдемесин аныктоочу тегиздиктердин

нормалдык векторлору  $\vec{n}_1 = \{1; -1; 1\}, \vec{n}_2 = \{1; 1; -2\}$  болгондуктан, аларды

вектордук

көбөйтүп,

$$\vec{s} = \left[ \vec{n}_1, \vec{n}_2 \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} = \{1; 3; 2\}$$

түздүн багыттоочу  $\vec{s}$  векторун табабыз.

Түздүн теңдемесин (35) каноникалык көрүнүшүн пайдаланып, түздүн система көрүнүшүндө берилген теңдемесин  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$  каноникалык көрүнүшкө келтиребиз.

2. Эки чекит аркылуу өтүүчү түздүн каноникалык теңдемесин түзөлү.

Мейкиндикте берилген  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  жана  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  чекиттери аркылуу өтүүчү бир гана L түзүн жүргүзүү мүмкүн.

Чынында эле L түзүнөн үчүнчү бир эркин кыймылда өзгөргөн  $M(x; y; z)$  чекитин алсак,  $\vec{M_1M}, \vec{M_1M_2}$  векторлору бир түздө жатышкан векторлор катары коллинеардуу болушат. Коллинеардуулук шарты боюнча  $\lambda$  саны табылып,  $\vec{M_1M} = \lambda \vec{M_1M_2}$  теңдештиги аткарылат.

Бул теңдештикти координаталары боюнча жазалы

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1), \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1), \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1). \end{cases}$$

Аны  $\lambda$  санына карата теңдеп,

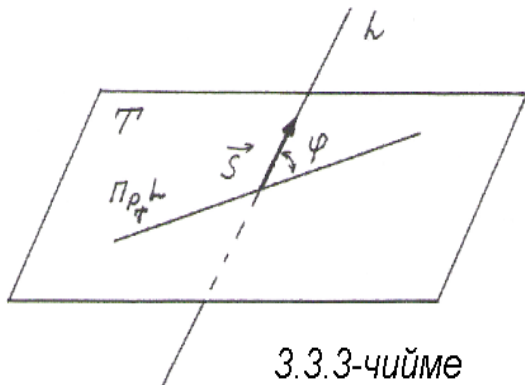
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (38)$$

көрүнүштөгү L түзүн каноникалык теңдемесин алабыз.

(38) теңдемеси  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  чекити аркылуу өткөн,

$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$  багыттоочу векторуна карата түздүн каноникалык теңдемеси болот.

### 3.3.4 Мейкиндикте түз менен тегиздиктин жайгашуу абалдары



3.3.3-чыйме

#### 1. Түз менен тегиздиктин бурчу

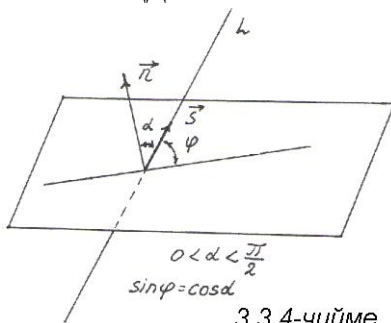
Айталы L түзү

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (37)$$

каноникалык теңдемеси менен, ал эми T тегиздиги

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (38)$$

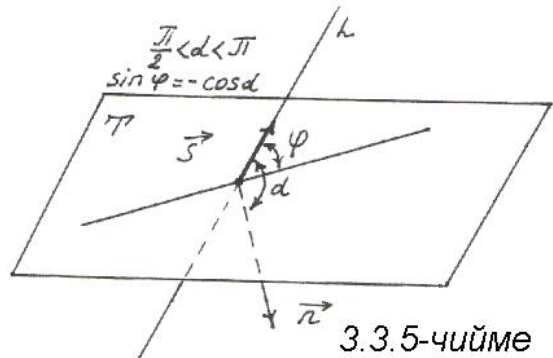
жалпы теңдемеси менен берилсин. L түзү менен T тегиздигин арасындагы  $\varphi$  бурчу деп, L түзү менен анын T тегиздигиндеги проекциясын арасындагы бурчтардын кичинесин айтабыз (3.3.3-чыйме).



3.3.4-чыйме

Берилген тегиздиктин

$\vec{n} = \{A; B; C\}$  нормаль - вектору менен (37) түздүн же анын багыттоочу  $\vec{s} = \{a; b; c\}$  векторунун арасындагы



3.3.5-чыйме

бурч  $\alpha$  болсо (3.3.4-чыйме), анда ал бурчтун косинусу  $\cos \alpha = \frac{(\vec{n}, \vec{s})}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$

формуласы менен аныкталары белгилүү.  $\vec{n}$  вектору T тегиздигине перпендикуляр болгондуктан,  $\varphi + \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$  болуп,  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$  келип чыгат. Мындан

$$\cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \begin{cases} \sin \varphi, & \text{эгерде } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ (3.3.4-чыйме),} \\ -\sin \varphi, & \text{эгерде } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ (3.3.5-чыйме)} \end{cases} \quad \text{же } \sin \varphi = |\cos \alpha|$$

тендештигине ээ болобуз. Демек

$$\sin \varphi = \frac{|(\vec{n}, \vec{s})|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (38)$$

формуласы,  $L$  түзү менен  $T$  тегиздигин арасындагы  $\varphi$  бурчун синусун табуу эрежеси болот (3.3.5-чийме).

(38) формуласынан  $L$  түзүнүн  $T$

тегиздигине параллель болуу шартын табабыз:  $L // T \Rightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Rightarrow (\vec{s}, \vec{n}) = 0$ .

Аны координаталары менен жазып  $A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c = 0$ , (39)

түз менен тегиздиктин параллелдүүлүк шартына ээ болобуз.

Ошондой эле  $L$  түзү  $T$  тегиздигине перпендикуляр болсо, анда  $L$  түзүнүн  $\vec{s}$  багыттоочу вектору,  $T$  тегиздигин  $\vec{n}$  нормалдык векторуна параллель же коллинеардуу болуп,  $\vec{n} = \lambda \cdot \vec{s}$  шарты аткарылат. Аны координаталары менен туюнтсак:  $A = \lambda a$ ,  $B = \lambda b$ ,  $C = \lambda c$  келип чыгат. Аларды  $\lambda$  га карата теңдеп, түз менен тегиздиктин

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} \quad (40)$$

перпендикулярдуулук шартына ээ болобуз.

## 2. Түз менен тегиздиктин кесилиши

Эгерде  $L$  түзү  $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$  (41)

каноникалык теңдемеси менен, ал эми  $T$  тегиздиги

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (42)$$

теңдемеси менен берилишсе, анда алардын кесилишүү чекитин табуу үчүн, бул теңдемелердин экөөсүн тең канааттандыруучу  $M(x, y, z)$  чекитин табуу керек. (41), (42) ни теңдемелер системасы катарында карап, анын  $x, y, z$  өзгөрүлмөлөрүнө карата чечимдерин табабыз. Бирок, белгисиз өзгөрүлмөлөрдүн саны үчөө болуп, системага кирген теңдемелер экөө гана болгондуктан, өзгөрүлмөлөрдүн бирөөсүн сыноо жолу менен эркин тандап, калган экөөсүн эки белгисиздүү эки (41) жана (42) теңдемелеринен турган системанын чечими катарында аныктайбыз.

Түз менен тегиздиктин кесилишүү чекитин табуунун дагы бир усулун көрсөтөлү.

Айталы (41) теңдемеси менен берилген  $L$  түзүнүн параметрдик

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (43)$$

теңдемеси белгилүү болсун, анда түз менен тегиздик кесилишүүчү  $M(x, y, z)$  чекитин координаталарын (43) маанилери, (42) теңдемесин канааттандырууга тийиш, б.а.

$$A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0 \quad \text{же}$$

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + t(Aa + Bb + Cc) = 0$  шарты аткарылат. Бул шарттагы  $t$  параметрин табылган  $t_0$  мааниси

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Aa + Bb + Cc}, \quad (44)$$

( $Aa + Bb + Cc \neq 0$ ) көрүнүштө болот. Андай болсо, табылган  $t_0$  дүн (44) маанисин (43) кө коюп,  $M(x, y, z)$  кесилишүү чекитинин координаталарын бир маанилүү аныктай алабыз. Мисал катарында  $\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$  түзү менен  $2x + y + 7z - 3 = 0$  тегиздигин кесилишүү чекитин табалы.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген түз  $M_0(7; 3; -1)$  чекити аркылуу өтүп,  $\vec{s} = \{3; 1; -2\}$ -багыттоочу векторуна ээ болуп, 
$$\begin{cases} x = 7 + 3t, \\ y = 3 + t, \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$
 параметрдик

теңдемеси менен жазылат. Бул маанилерди тегиздиктин теңдемесине коюп,  $2(7 + 3t) + 3 + t + 7(-1 - 2t) - 3 = 0$  же  $-7t + 7 = 0$  теңдемесинен

параметрдин  $t_0 = 1$  маанисин табабыз. Мындан 
$$\begin{cases} x = 7 + 3 \cdot 1 = 10, \\ y = 3 + 1 = 4, \\ z = -1 - 2 \cdot (1) = -3 \end{cases}$$

маанилерин таап, түз менен тегиздиктин кесилишүү чекити  $M(10; 4; -3)$  болорун көрөбүз.  $\triangleleft$

## 9. Мисалдар

1.  $M_1(1; 2; 3)$ ,  $M_2(-1; 2; 1)$  жана  $M_3(3; -1; 1)$  чекиттери аркылуу өтүүчү тегиздиктин нормалдык теңдемесин жазгыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Үч чекит аркылуу бир гана тегиздик жүргүзүү мүмкүн. Ал тегиздик (27) формуласы боюнча аныкталган теңдеме менен берилет.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 2-2 & 1-3 \\ 3-1 & -1-2 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 3x + 4y - 3z - 2 \quad \text{болгондуктан,}$$

изделүүчү тегиздик  $3x + 4y - 3z - 2 = 0$  жалпы теңдемесине ээ болот. Анын нормаль-вектору  $\vec{n} = \{3; 4; -3\}$  болуп, нормалдаштыруучу көбөйтүүчүнү

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{34}},$$

$\left( C = -2 < 0, \text{ ошондуктан "+" белгисин алабыз} \right)$  аныктайбыз. Демек,  $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$ ,

$$\cos \beta = \frac{4}{\sqrt{34}}, \quad \cos \gamma = \frac{-3}{\sqrt{34}}, \quad p = \frac{2}{\sqrt{34}} \quad \text{сандары табылып, тегиздик}$$

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \frac{2}{\sqrt{34}} = 0 \quad \text{нормалдашкан теңдемеси менен}$$

берилет.  $\triangleleft$

2.  $\sqrt{41}x + 2y - 2z + 3 = 0$  жалпы теңдемеси менен берилген тегиздиктин бирдик нормаль - векторун (ортун) аныктагыла.

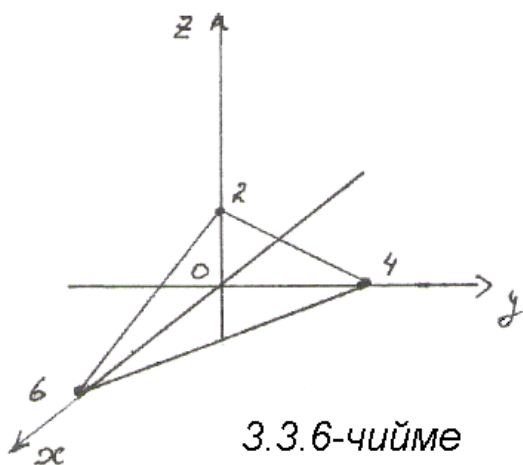
**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Нормалдык вектор  $\vec{n} = \{A; B; C\} = \{\sqrt{41}; 2; -2\}$

болгондуктан, анын орту

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\sqrt{41}\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{41+4+4}} = \frac{\sqrt{41}}{7}\vec{i} + \frac{2}{7}\vec{j} - \frac{2}{7}\vec{k} = \left\{ \frac{\sqrt{41}}{7}; \frac{2}{7}; -\frac{2}{7} \right\}$$

бирдик вектору болот.  $\triangleleft$

3.  $M_0(1;0;0)$  чекити аркылуу өтүп,  $x + y + z = 0$  тегиздигине параллель болгон тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.



**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген  $x + y + z = 0$  тегиздигин нормалдык вектору  $\vec{n} = \{1; 1; 1\}$ , изделүүчү тегиздикке да нормаль - вектор болот, анткени изделүүчү тегиздик берилген тегиздикке параллель жайгашкан. Ошентип  $M_0(1; 0; 0)$  чекити аркылуу өткөн,  $\vec{n} = \{1; 1; 1\}$  векторуна перпендикуляр болгон тегиздиктин

теңдемеси (25) формуласы боюнча

$1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 0) = 0$  же  $x + y + z - 1 = 0$  табылып, изделүүчү тегиздикке теңдеме болот.  $\triangleleft$

4.  $2x + 3y + 6z - 12 = 0$  тегиздигин кургула.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Үч чекит аркылуу бир гана тегиздикти куруу мүмкүн болгондуктан, берилген тегиздикке таандык үч чекитти табабыз. Ал чекиттерди координаттык октор менен берилген тегиздиктин кесилишүү чекиттери катарында издеп көрөлү:

$Ox$  огу менен кесилишүү чекитинде  $x = y = 0$  болгондуктан берилген теңдемеден  $z = 2$  келип чыгып, кесилишүү чекити  $M_1(0; 0; 2)$  болот.

$Oy$  огунда  $x = z = 0$  болуп,  $y = 4$  табылат же кесилишүү чекити  $M_2(0; 4; 0)$  болот.  $Ox$  огунда  $y = z = 0$ , анда  $x = 6$  же  $M_3(6; 0; 0)$  кесилишүү чекитине ээ болобуз (3.3.6-чыйме).

Табылган  $M_1, M_2, M_3$  чекиттерин туташтырып үч бурчтук түзөбүз, анын бети берилген тегиздиктин бөлүгү болуп, улантып сызуу менен тегиздик курулат.  $\triangleleft$

5.  $A(5; 4; 3)$  чекити аркылуу өтүп, координаттык окторду барабар кесиндилерге бөлүүчү тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Айталы изделүүчү тегиздик координаттык октордун үчөөсүн тең  $O$  башталмасынан  $a$  узактыгында кесип өтсүн. Анда бул тегиздиктин кесиндилердеги (24) теңдемеси



$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$  көрүнүштө болот. А чекити тегиздикте таандык

болгондуктан, анын теңдемесин канааттандырат  $\frac{5}{a} + \frac{4}{a} + \frac{3}{a} = 1$ , же  $a = 12$

ге ээ болобуз. Табылган  $a = 12$  маанисин теңдемеге коюп,  $\frac{x}{12} + \frac{y}{12} + \frac{z}{12} = 1$

же  $x + y + z - 12 = 0$  изделүүчү теңдемени түзөбүз.  $\triangleleft$

6.  $M_1(-2; 1; 5)$  жана  $M_2(4; 3; -1)$  чекиттери аркылуу өтүүчү түздүн жана ал жаткан тегиздиктин теңдемелерин жазгыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  (38) формуласы боюнча эки чекит аркылуу өтүүчү түздүн  $M_1M_2 = \vec{s} = \{6; 2; -6\}$  багыттоочу векторуна карата

$\frac{x+2}{4+2} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-5}{-1-5}$ , же  $\frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{-6}$  каноникалык көрүнүштөгү

теңдемесин түзө алабыз.

Каноникалык теңдемени 6 га көбөйтүп,  $x+2=3y-3=-z+5$ , аларды эки - экиден теңдеп,

$\begin{cases} x+2=3y-3, \\ -z+5=3y-3, \end{cases}$  системасына, аларды мүчөлөп кошуп жиберип,

$x-6y-z+13=0$  теңдемесине ээ болобуз. Бул теңдеме  $M_1, M_2$  чекиттери аркылуу өтүүчү түз жайгашкан тегиздиктин жалпы теңдемеси болот. Ошентип түздүн каноникалык теңдемесинен, ал жайгашкан тегиздиктердин бирөөсүнүн жалпы теңдемесин келтирип чыгарууга болот.  $\triangleleft$

7.  $M_0(-2; 2; 5)$  чекити аркылуу өтүп,  $\vec{s} = \{3; 1; -1\}$  векторуна параллель түздүн теңдемесин түзгүлө.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  (35) формуласынан пайдаланып, изделүүчү түздү

$\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{-1}$  каноникалык теңдемеси менен жазабыз. Түз

жайгашкан тегиздиктин жалпы теңдемеси  $2x-4y+2z+2=0$  болот.  $\triangleleft$

8.  $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ 5x+4y-z-7=0 \end{cases}$  жалпы теңдемеси менен берилген түздүн

каноникалык теңдемесин жазгыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген түз эки  $2x-y+3z-1=0$  жана  $5x+4y-z-7=0$  тегиздиктерин кесилишүү сызыгы болот. Бул

тегиздиктердин  $\vec{n}_1 = \{2; -1; 3\}$  жана  $\vec{n}_2 = \{5; 4; -1\}$  нормалдык векторлору, берилген түзгө жана анын багыттоочу  $\vec{s} = \{a; b; c\}$  векторуна перпендикуляр болушат. Демек, түздүн  $\vec{s}$  багыттоочу вектору катарында  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  векторлорунун вектордук көбөйтүндүсүн алууга болот

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 17\vec{j} + 13\vec{k} = \{-11; 17; 13\}.$$

Берилген түз өтүүчү бир  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  чекитин табалы. Ал үчүн түздүн жалпы теңдемесинде  $z = 1$  десек,  $(x, y, z)$  өзгөрүлмөлөрүн бирин

эркин тандайбыз), анда  $\begin{cases} 2x - y = -2, \\ 5x + 4y = 8 \end{cases}$  теңдемелер системасынан  $\begin{cases} x = 0, \\ y = 2 \end{cases}$

чечимдери табылып, түз өтүүчү бир  $M_0(0; 2; 1)$  чекити аныкталат. Демек, түз өтүүчү чекит жана багыттоочу  $\vec{s}$  вектору белгилүү болгондуктан,

(35) формуласы боюнча  $\frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}$  түздүн каноникалык

теңдемесин түзө алабыз. <

9.  $7x - 2y + 3z - 1 = 0$  тегиздиги менен  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-5}$  түзүнүн өз ара жайланышуу абалын аныктагыла.

**Чыгаруу:** > Берилген тегиздиктин нормалдык вектору  $\vec{n} = \{7; -2; 3\}$ , ал эми түздүн багыттоочу вектору  $\vec{s} = \{3; 2; -5\}$  белгилүү. Түз өткөн чекиттердин бирин жогорудагыдай ыкмада аныктап,  $M_0(1; -2; 0)$  чекитин табалы. Түз менен тегиздикти салыштырабыз:

а) Бул  $\vec{n}, \vec{s}$  эки вектору өз ара коллинеардуу болбойт, анткени координаталары өз ара пропорционалдуу эмес же берилген түз тегиздикке перпендикуляр жайгашкан эмес.

б) Скалярдык көбөйтүүдөн  $(\vec{n}, \vec{s}) = 7 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 2 \neq 0$  алып, алардын өз ара перпендикуляр эместигин, же берилген түздүн тегиздикке параллель болбосун көрөбүз.

Салыштыруулардын натыйжасында берилген түз тегиздикти жантаюу бурчу  $\frac{\pi}{2}$  ден кичине болгондой абалда кесип өтөрүн байкайбыз.

Кесилишүү чекитин табалы: Берилген түз  $M_0(1; -2; 0)$  чекити аркылуу өткөндүктөн, параметрдик теңдемесиндеги

$$\begin{cases} x = x_0 + 3t = 1 + 3t, \\ y = y_0 + 2t = -2 + 2t, \\ z = z_0 - 5t = -5t \end{cases} \text{ маанилерин тегиздиктин теңдемесине}$$

коюп,  $7(1+3t) - 2(-2+2t) + 3(0-5t) - 1 = 0$  теңдештигине ээ болобуз. Бул теңдештиктен табылган  $t = 5$  маанисин параметрдик теңдемеге коюп,  $x = 1 + 3(-5) = -14$ ,  $y = -2 + 2(-5) = -12$ ,  $z = -5(-5) = 25$  кесилишүү чекитин  $M(-14; -12; 25)$  координаталарын табабыз.

Берилген түз менен тегиздиктин арасындагы бурч (38) формуласына ылайык,

$$\sin \varphi = \frac{|(\vec{n}, \vec{s})|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|7 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-5)|}{\sqrt{7^2 + (-2)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + (-5)^2}} = \frac{2}{\sqrt{62} \cdot \sqrt{38}} = \frac{2}{2\sqrt{589}} = \frac{1}{\sqrt{589}},$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{589}}\right) \text{ болот. } \triangleleft$$

10. Берилген  $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$  жана  $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$  түздөрүнө параллель болуп,  $M_0(4; -3; 4)$  чекити аркылуу өтүүчү тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген түздөрдүн багыттоочу векторлорун тиешелүү түрдө  $\vec{s}_1 = \{6; 2; -3\}$ ,  $\vec{s}_2 = \{5; 4; 2\}$  деп белгилейли.  $\vec{s}_1$ ,  $\vec{s}_2$  векторлору да изделүүчү тегиздикке параллель болушуп, анын  $\vec{n} = \{A; B; C\}$  нормаль – векторуна перпендикуляр жайгашат. Ошондуктан изделүүчү тегиздиктин нормаль - вектору катарында  $\vec{s}_1$ ,  $\vec{s}_2$  векторлорун вектордук көбөйтүндүсүн алууга болот

$$\vec{n} = [\vec{s}_1, \vec{s}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16\vec{i} - 27\vec{j} + 14\vec{k} = \{16; -27; 14\}.$$

Берилген  $M_0(4; -3; 4)$  чекити аркылуу өтүп,  $\vec{n} \{16; -27; 14\}$  векторуна перпендикуляр тегиздиктин теңдемеси (25) формуласына ылайык

$$16(x-4) - 27(y+3) + 11(z-4) = 0 \text{ же}$$

$16x - 27y + 14z - 159 = 0$  болот.  $\triangleleft$

$$11. \begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2z = -3x + 2 \end{cases} \text{ түзү менен } 2x + y + z - 4 = 0 \text{ тегиздигин}$$

арасындагы бурчту тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген түздүн жалпы теңдемесин каноникалык абалга келтиребиз. Түздү  $y = 3x - 1$  жана  $2z = -3x + 2$  тегиздиктерин кесилишүү сызыгы катарында карап, түз өтүүчү бир чекитти жана багыттоочу векторун аныктаган соң, түздүн теңдемесин каноникалык абалга келтире алабыз.

Алгебралык теңдеш өзгөртүп түзүү усулун колдонуу менен берилген тегиздиктердин теңдемелерин  $x$  ке карата теңдештирип,

$$x = \frac{y+1}{3}, \quad x = \frac{2(z-1)}{-3} \Rightarrow x = \frac{y+1}{3} = \frac{2(z-1)}{-3} \text{ аларды 2 ге бөлүп,}$$

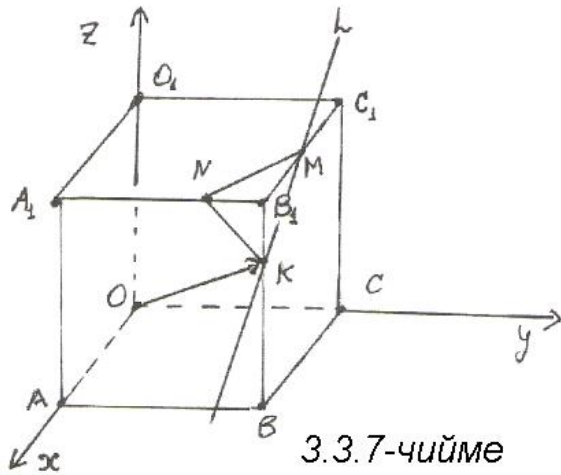
$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{-3}$$

түздүн кононикалык теңдемесин табабыз. Демек, түздүн багыттоочу вектору  $\vec{s} = \{2; 6; -3\}$  болуп, (38) формуласы боюнча анын берилген тегиздиктин  $\vec{n} = \{2; 1; 1\}$  нормаль - вектору менен түзгөн бурчунун косинусу  $\cos \alpha$ , же түз менен тегиздиктин арасындагы  $\varphi$  бурчун синусу ( $\sin \varphi = |\cos \alpha|$  теңдештиги эске алынат)

$$\sin \varphi = \frac{|(\vec{n}, \vec{s})|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + (-3) \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{7}{7\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$$

көрүнүштө табылат.  $\triangleleft$

12.  $OABCO_1A_1B_1C_1$  кубун кыры  $a$  узундук бирдигине барабар.  $B_1$  чокусунан  $\frac{a}{7}$  бирдик узактыкта жайгашкан  $B_1B$  кырындагы  $K$  чекитинен өтүп,  $(OK)$  түзүнө перпендикуляр тегиздик менен кубдун кесилишин аянтын эсептегиле (3.3.7 – чийме).



**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген кубду координаттык мейкиндикте 3.3.7-чиймеде көрсөтүлгөндөй жайгашкан дейли. Анда  $K$  чекитин координаталары  $K\left(a; a; \frac{6a}{7}\right)$  болуп,  $\vec{OK} = \left\{ a; a; \frac{6a}{7} \right\}$  радиус – вектору кесилиш жаткан тегиздиктин  $\vec{n}$  нормаль-вектору боло алат.

Ошентип  $K\left(a; a; \frac{6a}{7}\right)$  чекитинен өтүп,  $\vec{n} = \left(a; a; \frac{6a}{7}\right)$  векторуна перпендикуляр тегиздиктин  $a(x-a) + a(y-a) + \frac{6a}{7}\left(z - \frac{6a}{7}\right) = 0$  көрүнүштөгү теңдемесине ээ болобуз. Бул тегиздиктин куб менен кесилүү чекиттерин бирөөсү  $K\left(a; a; \frac{6a}{7}\right)$ , калган экөөсүн табалы. Ал чекиттер кубдун жогорку бетиндеги кырларда жайгашкан  $M, N$ , чекиттери болуп,  $M$  чекитин

$y = a, z = a$  координаталары,  $N$  чекитин  $x = a, z = a$  координаталары белгилүү.  $M, N$ , чекиттери тегиздикке таандык болуп, анын теңдемелерин канааттандыргандыктан.  $M$  чекитине карата  $a(x-a) + a(a-a) + \frac{6a}{7}\left(a - \frac{6a}{7}\right) = 0$  теңдештигинен

$x = \frac{43a}{49}$  координатасын,  $N$  чекитине карата

$$a(a-a) + a(y-a) + \frac{6a}{7}\left(a - \frac{6a}{7}\right) = 0$$

теңдештигинен  $y = \frac{43a}{49}$  координатасын табабыз.

Ошентип жүргүзүлгөн тегиздик

$K\left(a; a; \frac{6a}{7}\right), M\left(\frac{43a}{49}; a; a\right), N\left(a; \frac{43a}{49}; a\right)$  үч чекиттер аркылуу өтөт.

Чокулары ушул эле чекиттер болгон үч бурчтуктун аянты, тегиздиктин куб менен кесилишкен бөлүгүн аянты болот.

$\overrightarrow{KM} = \left\{ -\frac{6a}{49}; 0; \frac{a}{7} \right\}$ ,  $\overrightarrow{KN} = \left\{ 0; -\frac{6a}{49}; \frac{a}{7} \right\}$  болгондуктан, үч бурчтуктун

аянты  $S_{\Delta\text{аянт}} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KN}] \right|$  көрүнүштө эсептелет. Вектордук көбөйтүүдөн кийин

$$[\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KN}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{6a}{49} & 0 & \frac{a}{7} \\ 0 & -\frac{6a}{49} & \frac{a}{7} \end{vmatrix} = \vec{i} \frac{6a^2}{343} + \vec{j} \frac{6a^2}{343} + \frac{36a^2}{2401} \vec{k} = \left\{ \frac{6a^2}{7^3}; \frac{6a^2}{7^3}; \frac{(6a)^2}{7^4} \right\}$$
 вектору келип

чыгат. Анын узундугун жарымы изделүүчү аянт бирдигине барабар

$$S_{\Delta\text{аянт}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6^2 a^4}{7^6} + \frac{6^2 a^4}{7^6} + \frac{(6a)^4}{7^8}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6a^2}{7^3} \sqrt{1+1+\frac{6^2}{7^2}} = \frac{3a^2 \sqrt{134}}{7^4}. \triangleleft$$

13.  $\begin{cases} 2x + 3y + 3z - 9 = 0, \\ 4x + 2y + z - 8 = 0 \end{cases}$  жалпы теңдемеси менен берилген түздүн

чиймесин сызгыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген түз  $2x + 3y + 3z - 9 = 0$  жана  $4x + 2y + z - 8 = 0$  тегиздиктерин кесилиш сызыгы болот. Системада берилген теңдемелерди тегиздиктин кесиндилердеги (24) теңдемелерине өзгөртүп түзөлү:

a)  $2x + 3y + 3z - 9 = 0 \Rightarrow \frac{2x}{9} + \frac{3y}{9} + \frac{3z}{9} = 1$  же  $\frac{x}{4,5} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1;$

б)  $4x + 2y + z - 8 = 0 \Rightarrow \frac{4x}{8} + \frac{2y}{8} + \frac{z}{8} = 1$  же  $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1.$

Алардын графиктерин тургузуп, эки үч бурчтуктун кесилишүү сызыгы  $L$  түзү болорун көрөбүз (3.3.8 – чийме).  $\triangleleft$

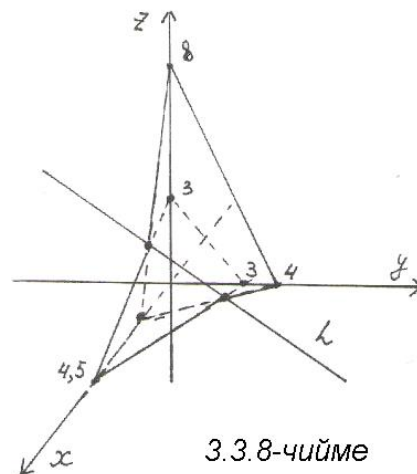
## Көнүгүүлөр

3.1. Төмөндөгү берилгендер боюнча тегиздиктин теңдемесин түзгүлө:

а)  $Oxz$  тегиздигине параллель болуп,  $M(2; -5; 3)$  чекити аркылуу өткөн;

б)  $Oz$  огу жана  $M(-3; 1; -2)$  чекити аркылуу өткөн.

(жообу а)  $y + 5 = 0$ ; б)  $x + 3y = 0$ .)



3.3.8-чийме

3.2.  $A(1; 3; -2)$  жана  $B(7; -4; 4)$  чекиттери берилген.  $B$  чекитинен өтүүчү жана  $AB$  кесиндисине перпендикуляр тегиздиктин теңдемесин түзгүлө. (жообу  $6x - 7y + 6z - 94 = 0$ )

3.3. Тегиздиктердин теңдемесин түзгүлө:

а)  $M(-2; 7; 3)$  чекитинен өтүп,  $x - 4y + 5z - 1 = 0$  тегиздигине параллель;

б)  $O$  координаты башталмасы аркылуу өтүп,

$2x - y + 5z + 3 = 0$  жана  $x + 3y - z - 7 = 0$  эки тегиздиктерине перпендикуляр болгон тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.

(жообу а)  $x - 4y + 5z + 15 = 0$ ; б)  $2x - y - z = 0$ .)

3.4. Эгерде  $O$  чекитинен  $T$  тегиздигине түшүрүлгөн перпендикулярдын негизи,  $T$  тегиздигинде жайгашкан  $P(3; -6; 2)$  чекити болсо, анда  $T$  тегиздигин теңдемесин жазгыла. (жообу  $3x - 6y + 2z - 49 = 0$ )

3.5. Координата башталмасы  $O(0; 0; 0)$  жана  $A(3; -2; 1)$ ,  $B(1; 4; 0)$  чекиттери аркылуу өткөн тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.

(жообу  $4x - y - 14z = 0$ )

3.6.  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}$  жана  $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}$  түздөрүн арасындагы

бурчту аныктагыла.

(жообу  $\cos \varphi = \frac{72}{77}$ )

3.7.  $\begin{cases} 2x - 3y - 3z + 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$  түзүнүн жалпы теңдемесин каноникалык

түргө келтиргиле.

$$\left( \text{жообу} \quad \frac{x}{9} = \frac{y}{8} = \frac{z+3}{-1} \right)$$

3.8.  $M(2; -5; 3)$  чекити аркылуу төмөндөгүдөй шарттарда жүргүзүлгөн түздөрдүн теңдемесин түзгүлө:

а)  $Oz$  огуна параллель түздүн;

б)  $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$  түзүнө параллель түздүн.

$$\left( \text{жообу} \quad \text{а)} \quad \frac{x-2}{0} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-3}{1} \quad \text{же} \quad \begin{cases} x-2=0, \\ y+5=0; \end{cases} \quad \text{б)} \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}; \right)$$

$$\text{в)} \quad \frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$$

3.9.  $2x - 3y + 5z - 7 = 0$  тегиздигине перпендикуляр болуп,  $A(1; -1; 0)$  чекити аркылуу өтүүчү түздүн теңдемесин жазгыла.

$$\left( \text{жообу} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{3} \right)$$

3.10. Кесилишүү чекитин тапкыла:

а)  $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$  түзү менен  $3x - y + 2z - 5 = 0$  тегиздигин;

б)  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$  түзү менен  $3x - 3y + 2z - 5 = 0$  тегиздигин.

(Жообу а)  $(2; 3; 1)$ ; б) кесилишпейт, анткени тегиздикке параллель жайгашкан)

3.11.  $O(0; 0; 0)$  координата башталмасынан  $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{-2}$  түзүнө перпендикуляр болуп курулган тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.

$$(\text{Жообу} \quad 4x + 5y - 2z = 0)$$

3.12.  $A(4; -3; 1)$  чекитин  $x + 2y - z - 3 = 0$  тегиздигиндеги проекциясын тапкыла.

$$(\text{Жообу} \quad (5; -1; 0))$$

3.13. Берилген  $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$  жана  $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$  түздөрүн экөөсүнө тең параллель болуп,  $M(4; -3; 1)$  чекити аркылуу өтүүчү тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.

$$(\text{Жообу} \quad 16x - 27y + 14z - 159 = 0)$$

3.14.  $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{2}$  түзү аркылуу өтүп,  $\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$  түзүнө

параллель тегиздиктин теңдемесин түзгүлө.

$$(\text{Жообу} \quad 23x - 16y + 10z - 153 = 0)$$



3.15. Берилген чекиттен берилген тегиздикке чейинки аралыкты тапкыла:

а)  $M(1; 2; 4)$  чекитинен  $2x + 2y - z - 11 = 0$  тегиздигине чейин;

б)  $M(7; 0; -7)$  чекитинен  $18x - 6y + 9z + 14 = 0$  тегиздигине чейин;

в)  $M(\sqrt{5}; \sqrt{12}; 2)$  чекитинен  $y\sqrt{3} + z + 20 = 0$  тегиздигине чейин.

$\left( \text{жообу а) } 3; \text{ б) } \frac{27}{21}; \text{ в) } 14 \right)$

3.16. Төмөндөгү өз ара параллель тегиздиктердин арасындагы аралыктарды тапкыла:

а)  $3x - 6y + 2z + 35 = 0$  менен  $6x - 12y + 4z + 5 = 0$ ;

б)  $5x + 2y - 3z - 5 = 0$  менен  $10x + 4y - 6z + 5 = 0$ ;

в)  $7x - y + \sqrt{2} \cdot z - 3\sqrt{2} = 0$  менен  $7\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{2} \cdot y + 2z + 6 = 0$ .

$\left( \text{Жообу а) } \frac{65}{14}; \text{ б) } \frac{15}{\sqrt{252}}; \text{ в) } \frac{12}{\sqrt{104}}; \right)$

3.17. Пирамиданын чокулары

$A(2; 1; -1)$ ,  $B(3; 0; 1)$ ,  $C(2; -1; 3)$  жана  $D(0; -7; 0)$  чекиттеринде жайгашкан.

Пирамиданын D чокусунан түшүрүлгөн бийиктикти тапкыла .

$\left( \text{Жообу } H = \frac{15}{\sqrt{5}}; \right)$

## IV ГЛАВА. ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ИЙРИЛЕР ЖАНА БЕТТЕР

### § 4.1 Тегиздиктеги координаталар системасын өзгөртүп түзүү

#### 4.1.1 Параллель которуу жана буруу

Чөйрө кубулуштарынын математикалык моделдерди түзүүдө, байкоочу адам турган жерди элестеткен  $O$  башталма чекитине негизги көңүл бурулуп, сан моделдерин жайгаштыруу, векторлорду куруу, түздөр менен тегиздиктердин тендемелерин түзүү сыяктуу амал - аракеттер, ушул  $O$  чекитине салыштырылып ишке ашырылганын байкадык. Чөйрөдө реалдуу жайгашкан объект кайсы  $O$  чекитинен карасаң да мурдагы реалдуу абалында кала берет. Бирок  $O$  чекити өзгөргөн сайын, көз мерчеминде анын формасы кичирейип же чоңоюп көрүнүп, сүрөттөлүшү өзгөрөт. Демек анын математикалык модели да, ар башка байкоо чекиттеринде ар башка көрүнүштөрдө болушат. Математикалык модели түзүлүп жаткан объект өзгөрбөгөндүктөн, анын ар бир тандалган  $O$  башталуу чекитине карата түзүлгөн моделдерин арасында байланыш болууга тийиш.

Тегиздиктен каалагандай эркин тандалган  $O$  башталуу чекити жана ага карата эркин багыттарда түзүлгөн тик бурчтуу декарттык координаталар системалары, бир эле башталмада орнотулган тик бурчтуу декарттык координаталар системасын параллель которуу жана буруу менен ишке ашырыларын байкайбыз. Ошондуктан реалдуу объектке байкоо жүргүзүү чекити жана көрүү талаасын багыттары өзгөргөн кезде түзүлгөн математикалык моделдердин арасындагы байланыштар, ошол объекттин координаталарын параллель которуу жана буруу учурундагы өзгөрүү байланыштарын орнотуу менен көрсөтүлөт.

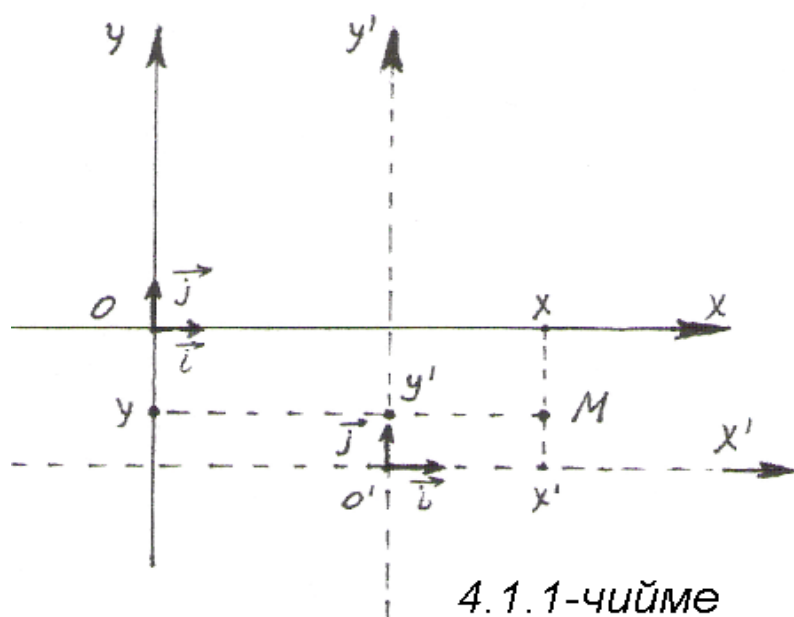
#### I. Параллель которуу

Айталы, тегиздикте  $Oxy$  жана  $O'x'y'$  тик бурчтуу декарттык координаталар системалары берилип, координаттык октору өз ара параллель жайланышсын, б.а.  $Ox \parallel O'x'$ ,  $Oy \parallel O'y'$  дейли. Бул учурда  $Oxy$  координаталар системасы  $O'x'y'$  абалына параллель которулду (же

тескерисинче) деп түшүнөбүз. Мындай которууда  $Oxy$ ,  $O'x'y'$  координаттык системаларын орттору тең болушуп ( $\vec{i} = \vec{i}'$ ,  $\vec{j} = \vec{j}'$ ), аларды бир эле  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  орттору деп эсептөөгө болот.

Кайсы бир объект катарында тегиздиктен эркин тандалган  $M$  чекитин, бул координаталар системасына карата тиешелүү түрдө  $(x; y)$  жана  $(x'; y')$  координаталары менен даректештирили (4.1.1-чийме).

Андай болсо  $M$  чекити  $Oxy$  системасында



$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j},$$

$O'x'y'$  системасында  $\vec{r}' = x' \cdot \vec{i}' + y' \cdot \vec{j}'$ , радиус векторлоруна ээ болот. Ал эми  $O'$  чекити  $Oxy$  системасына карата  $O'(\alpha; \beta)$  координаталуу чекит болсун, анда  $O'$  чекитин  $Oxy$  ке карата радиус – вектору  $\vec{OO}' = \alpha \cdot \vec{i} + \beta \cdot \vec{j}$  болуп,

$\vec{r}$ ,  $\vec{r}'$ ,  $\vec{OO}'$  векторлору  $\vec{r} = \vec{OO}' + \vec{r}'$  байланышында болушат (4.1.2-чийме).

Бул байланышты координаталары менен

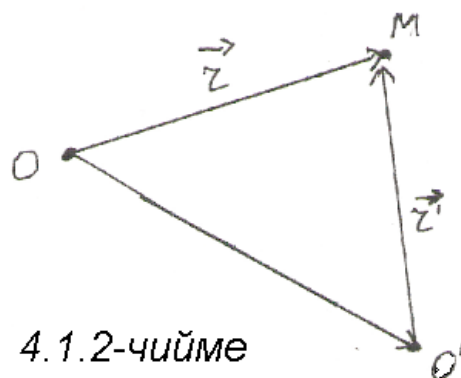
$$x\vec{i} + y\vec{j} = (\alpha \cdot \vec{i} + \beta \cdot \vec{j}) + (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

көрүнүштө жазып, тиешелүү координаталарын теңдеп,

$$\begin{cases} x = x' + \alpha, \\ y = y' + \beta \end{cases} \quad (1)$$

параллель которууда өзгөрүлгөн координаталарды байланыштыруучу (1) формуласына ээ болобуз.

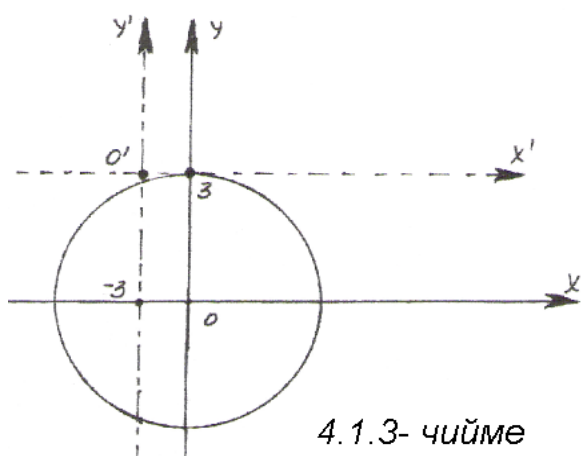
Мисал катарында бир эле айлананын эки координаттык системалардагы теңдемелерин көрсөтөлү.  $Oxy$  координаттык системада



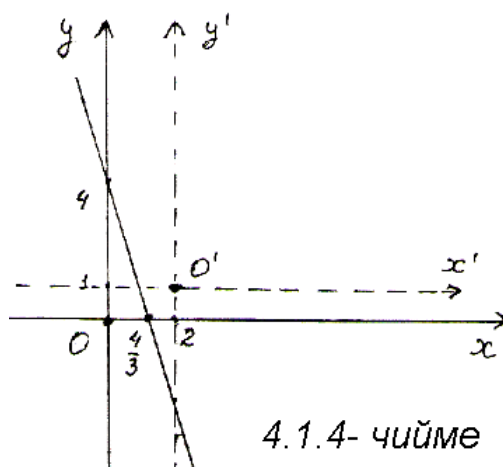
$x^2 + y^2 = 9$  аталыш теңдемеси менен берилген айлананын, башталмасы  $Oxy$  координаттык системадагы  $O'(-2;3)$  чекитине которулган  $O'x'y'$  координаттык системадагы аталыш теңдемесин түзөбүз (4.1.3 - чийме).  $Oxy$  координаттык системасында берилген теңдеме борбору  $O$  чекити, радиусу  $R=3$  болгон айлана болот. Ал эми (1) формуласын негизинде  $O'x'y'$  системасында  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 3$  болуп, теңдеме

$$(x' - 2)^2 + (y' + 3)^2 = 9 \text{ же}$$

$$(x')^2 + (y')^2 - 4x' + 6y' + 4 = 0$$



4.1.3- чийме

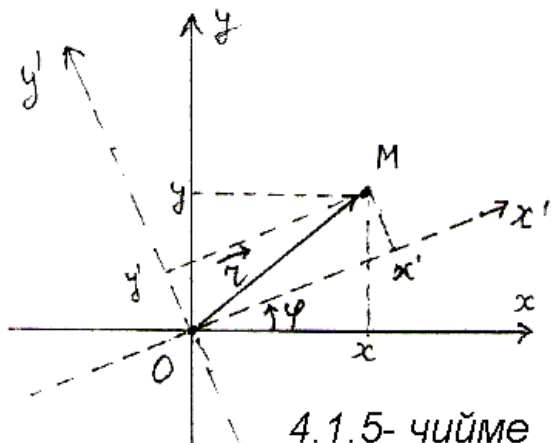


4.1.4- чийме

көрүнүшкө өзгөрүп, берилген айлана өзгөрбөй калганы менен,  $O'x'y'$  координата системасында борбору  $O(2; -3)$ , радиусу  $R=3$  болгон айлана сыяктуу көрүнүп, башка ат (теңдеме) менен жазылат.

Экинчи мисал  $Oxy$  координата системасында берилген түздүн  $3x + y - 4 = 0$  теңдемесин  $O'x'y'$  координата системасындагы өзгөрүүсүн көрсөтүү болсун.

$Oxy$  координаттык системада  $O'$  чекити  $O'(2;1)$  координаталарына

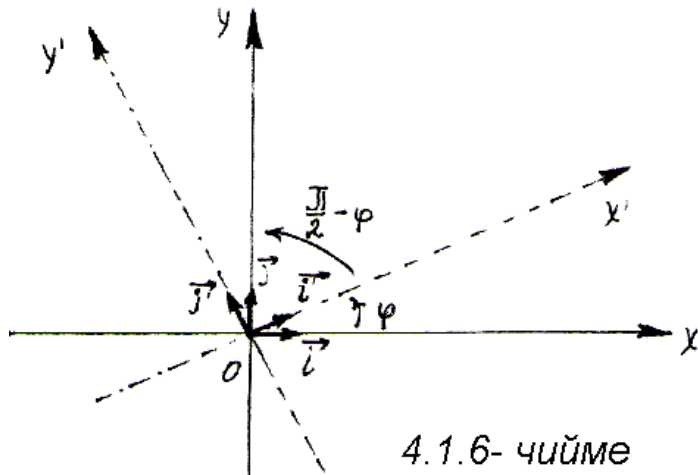


4.1.5- чийме

эе десек, анда  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$  болуп, (1) формуласы  $x = x' + 2$ ,  $y = y' + 1$  көрүнүшүндө жазылат. Бул маанилерди берилген түздүн теңдемесине коюп,  $3(x' + 2) + y' + 1 - 4 = 0$  же  $3x' + y' + 3 = 0$ , берилген түздүн жаңы  $O'x'y'$  координаттык системадагы аталыш теңдемесин алабыз (4.1.4 -

чийме). Ошентип бир эле түз  $O$  чекитинен үстүнөн өтүүчү болуп көрүнсө, экинчи байуоочу  $O'$  чекитинен төмөн жактан өтүүчү болуп көрүнүп, ар башка тендемелер менен аталышып жазылышат.

## II. Буруу



4.1.6- чийме

$Ox$  координата системасын  $O$  башталмасынын айланасында  $\varphi$  бурчуна бурганда жаңы  $Ox'y'$  координата системасы келип чыгат. Ошентип,  $Ox$  жана  $Ox'y'$  координаталар системалары жалпы  $O$  башталуу чекитине ээ болуп, координаттык октордун

багыттары боюнча гана айырмаланышат (4.1.5 - чийме).

Тегиздикте эркин абалда жайгашкан  $M$  чекити  $Ox$  координаталар системасында  $M(x; y)$ , ал эми  $Ox'y'$  координаталар системасында  $M(x'; y')$  координаталарга ээ болсун.  $Ox$  координаталар системасын ортторун  $\vec{i}, \vec{j}$ ; Ал эми  $Ox'y'$  координаталар системасын ортторун  $\vec{i}', \vec{j}'$  дейли (4.1.6 - чийме).

$\vec{i}'$  орту  $Ox'$  огуна жайгашып,  $Ox$  огу менен  $\varphi$ ;  $Oy$  огу менен

$\frac{\pi}{2} - \varphi$  бурчун түзгөндүктөн,

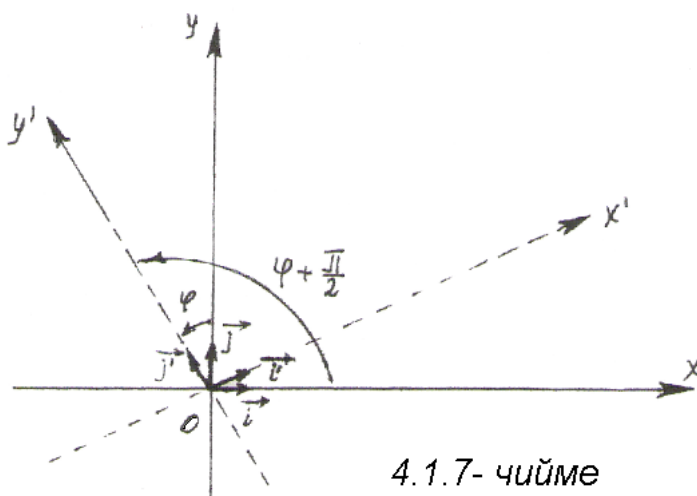
анын координаталары  $Ox$  системасын багыттоочу косинустары аркылуу

$$\vec{i}' = \left\{ \cos \varphi; \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right\} =$$

$$= \{ \cos \varphi; \sin \varphi \} = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi$$

көрүнүштө жазылат.  $\vec{j}'$

орту  $Oy'$  огуна жатып,  $Ox$



4.1.7- чийме

огу менен  $\varphi + \frac{\pi}{2}$ ,  $Oy$  огу менен  $\varphi$  бурчун түзүп,  $Oxy$  координаталар системасында

$$\vec{j}' = \left\{ \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right); \cos\varphi \right\} = \{-\sin\varphi; \cos\varphi\} = -\vec{i}' \sin\varphi + \vec{j}' \cos\varphi \quad \text{координаталары}$$

аркылуу жазылат (4.1.7 - чийме). Эркин тандалган  $M$  чекити  $Oxy$ ,  $Ox'y'$  координаталар системасынын экөөндө тең  $O$  чекитинен бирдей узактыкта жайгашкандыктан, анын  $\vec{r}$  жана  $\vec{r}'$  радиус - векторлору барабар болушат.  $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y = \vec{i}'x' + \vec{j}'y' = \vec{r}'$  теңдештигиндеги  $\vec{i}'$  жана  $\vec{j}'$  орторун ордуна координаталары менен жазылыштарын коюп,

$$\vec{i}x + \vec{j}y = (\vec{i} \cos\varphi + \vec{j} \sin\varphi)x' + (-\vec{i}' \sin\varphi + \vec{j}' \cos\varphi)y' \quad \text{же}$$

$$\vec{i}x + \vec{j}y = \vec{i}'(x' \cos\varphi - y' \sin\varphi) + \vec{j}'(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi) \quad \text{же}$$

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \end{cases} \quad (2)$$

$M$  чекитин  $Oxy$  системасындагы  $(x; y)$  координаталары менен,  $Ox'y'$  системасындагы  $(x'; y')$  координаталарын байланыштыруучу (2) формуласын табабыз.

Мисалы, жогоруда караган  $3x + y - 4 = 0$  түзүн  $Oxy$  координаталар системасын  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  бурчуна буруу менен курулган  $Ox'y'$  координаталар системасындагы теңдемесин көрсөтөлү.

$$(2) \text{ формуласынан } \varphi = \frac{\pi}{6} = 30^\circ \text{ болгондо } \begin{cases} x = x' \frac{\sqrt{3}}{2} - y' \frac{1}{2}, \\ y = x' \frac{1}{2} + y' \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{маанилерин}$$

аныктап, түздүн теңдемесине коёлу.

$$\text{Мындан } 3 \left( x' \frac{\sqrt{3}}{2} - y' \frac{1}{2} \right) + \left( x' \frac{1}{2} + y' \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 4 = 0, \text{ же}$$

$$x' \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) + y' \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) - 4 = 0, \text{ же } \frac{x'}{2} (3\sqrt{3} + 1) + \frac{y'}{2} (\sqrt{3} - 1) - 4 = 0$$

ошол эле түздүн буруудан кийинки  $Ox'y'$  координаталар системасындагы аталыш теңдемесине ээ болобуз. Берилген түз мурдагы эле абалында кала бергени менен, байкоо аппараты блгон декарттык координаталар системасы өзгөрүп, түздү мүнөздөгөн математикалык модели же аталыш теңдемеси башка көрүнүштө жазылат.

### III. Күзгүдөй чагылтуу

Координаттык системаларды параллель которуу же буруу менен өзгөртүп түзүүлөрдөн башка, кээде күзгүдөй чагылтып өзгөртүүнү да колдонобуз. Ал үчүн  $O$  башталмасы жана  $Ox$  абсцисса огу ордунда калып,  $Oy$  координата огун багытын карама– каршы багытка өзгөртөбүз. Бул өзгөртүүдөгү байланыш

$$\begin{cases} x = x', \\ y = -y' \end{cases} \quad (3)$$

көрүнүштө орнотулат.

Күзгүдөй чагылтууда түздүн  $3x + y - 4 = 0$  теңдемеси (3) байланыш формуласын негизинде  $3x' - y' - 4 = 0$  теңдемесине айланат.

#### ***Натыйжа.***

*1. Тегиздиктеги тик бурчтуу декарттык координаталар системаларын чен масштабдары өзгөрбөгөндөй абалда өзгөртүп түзүүлөрдүн баары, параллель которуу жана буруу амалдары менен гана ишке ашырылат. Зарыл болгон учурда күзгүдөй чагылтуу амалы да колдонулат.*

*2. Декарттык координаталар системасын өзгөртүп түзүүдө байкоо жүргүзүлүүчү объекттер мурдагы калыбында сакталып, алардын математикалык моделдери же теңдемелери гана өзгөрөт. Бул теңдемелерди байланыш формулалары аркылуу бир теңдемеге келтирүүгө болот. Ошондуктан декарттык координаталар системасын  $O$  башталма чекитин каалагандай эркин алынган чекитке жайгаштыра берсе болот.*

## § 4.2 Экинчи тартиптеги ийрилер

### 4.2.1 Экинчи тартиптеги көп мүчөлөрдү өзгөртүп түзүү

Тегиздикте берилген  $Oxy$  тик бурчтуу декарттык координаталар системасына карата түзүлгөн  $Ax + By + C = 0$ ,  $A^2 + B^2 > 0$  (коюлган шарт

$A, B$  коэффициенттери бир учурда нөл боло албайт дегенди түшүндүрөт) теңдемеси түз сызыкты мүнөздөп, өзгөрүлмө  $x, y$  чоңдуктары биринчи даражада катышкандыктан сызыктуу теңдеме деп аталат. Түздү болсо, биринчи тартиптеги ийри деп эсептөөгө болот.

Жалпы учурда тегиздикте жайгашкан бардык фигураларды эки ченемдүү жалпак фигуралар деп,  $P(x, y) = 0$  (4)

айкын эмес функция көрүнүштө же  $y$  ке карата чыгарылган  $y = f(x)$  айкын функция көрүнүштөгү теңдемелер менен мүнөздөөгө болот. Ошентип (4) жалпы теңдемесинде  $x, y$  өзгөрмөлөрү каалагандай даражада катыша алышат. Бул учурда (4) теңдемесин сол жагы  $x, y$  эки өзгөрмөлөрүнө карата  $P(x, y)$  көп мүчөсүн түзөт. Өзгөрүлмөлөрдүн даражаларын эң чоңу көп мүчөнүн тартиби деп аталат. Экинчи тартиптеги көп мүчөдөн турган (4) көрүнүштөгү теңдеме – функция сүрөттөгөн жалпак фигуралар экинчи тартиптеги ийрилер деп аталышат. Экинчи тартиптеги көп мүчө жалпы учурда

$$P(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + G \quad (5)$$

көрүнүштө жазылып, экинчи тартиптеги ийри

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + G = 0 \quad (4^A)$$

теңдемеси менен сүрөттөлөт ( $A, B, C, D, E, G \in R$ ). Тегиздикте чексиз көп ийрилер жашап, алардын арасынан коэффициенттери чыныгы сандар болушкан, оң бүтүн даражалуу экинчи тартиптеги ийрилер гана ( $4^A$ ) теңдемеси менен берилет. Аларга токтолуп өтөбүз.

Экинчи тартиптеги (5) көп мүчөнүн жазылышын  $Oxy$  координаталар системасын буруу жана параллель которуу менен өзгөртүп, колдонууга ыңгайлуу (каноникалык) көрүнүшкө келтирүүгө болот.

#### 1) Буруу

$Oxy$  тик бурчтуу координаталар системасын  $O$  башталмасын айланасында  $\varphi$  бурчуна буралы. Келип чыккан жаңы  $Ox'y'$  тик бурчтуу



координаталар системасы менен эски  $Oxy$  координаталар системасын арасындагы (2) байланыш формуласына ылайык

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{cases} \text{ болгондуктан, (5) көп мүчөгө } x, y \text{ тин байланыш}$$

маанилерин коюп, топтоштурган соң,  $x' \cdot y'$  көбөйтүндүсүн коэффициенттери болгон  $2B'$  санын нөлгө айлантуу шартын аткаруучу  $\varphi$  бурулуу бурчун табалы. Ордуна коюп эсептөөлөрдүн натыйжасында

$$\begin{aligned} P'(x', y') = & (A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi) (x')^2 + \\ & + (-2A \cos \varphi \sin \varphi + 2B \cos^2 \varphi - 2B \sin^2 \varphi + 2C \sin \varphi \cos \varphi) x' \cdot y' + \\ & + (A \sin^2 \varphi - 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \cos^2 \varphi) (y')^2 + (2D \cos \varphi + 2E \sin \varphi) x' + \\ & + (-2D \sin \varphi + 2E \cos \varphi) y' + G \end{aligned} \quad (6)$$

көп мүчөсүнө ээ болуп, мындан

$$2B' = 2(-A \sin \varphi \cos \varphi + B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + C \sin \varphi \cos \varphi) =$$

$$= (C - A) \sin 2\varphi + 2B \cos 2\varphi \text{ коэффициенттерин белгилеп,}$$

$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{A-C}{2B}$  болсо,  $2B' = 0$  болорун көрөбүз. Демек, бурулуу бурчун

$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{A-C}{2B}$  деп алсак, анда  $2B' = 0$  болуп, (6) көп мүчөсү

$$P'(x', y') = A' \cdot (x')^2 + C' \cdot (y')^2 + 2D' \cdot x' + 2E' \cdot y' + G' \quad (5^A)$$

көрүнүшкө өзгөрөт ( $A', B', D', E', G'$  деп белгиленген коэффициенттер (6) да кашаанын ичтеринде көрсөтүлгөн). Жазуудагы ыңгайлуулук үчүн, бурулуунун натыйжасында пайда болгон  $Ox'y'$  координаталар системасын кайра курулган  $Oxy$  деп эсептесек, (5<sup>A</sup>) көп мүчөсүн  $P(x, y) = Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + G \quad (5^B)$

көрүнүштө жаза алабыз. Анткени  $x', y', A', B', D', E', G'$  белгилөөлөрү жазууда ыңгайсыздыкты жаратат.

## 2) Параллель которуу

Кайра курулган  $Oxy$  тик бурчтуу координаталар системасын

$$\begin{cases} X = x + \alpha, \\ Y = y + \beta; \end{cases} \text{ параллель которуусу аркылуу } O'X'Y' \text{ тик бурчтуу}$$

координаталар системасына өзгөртөлү. Жаңы  $O'X'Y'$  координаталар системасын октору, эски  $Oxy$  координаталар системасын окторун (

$-\alpha; -\beta$ ) чекитине которуу менен ишке ашырылат.  $\alpha$  менен  $\beta$  га айрым конкреттүү шарттарды коюу менен (5<sup>B</sup>) көп мүчөсүн төмөндөгүдөй үч учурдагы көрүнүштөргө гана келтирүүгө болот:

1.  $A \neq 0, C \neq 0$  болсо,  $\alpha = \frac{D}{A}, \beta = \frac{E}{C}$  деп тандап, (5<sup>B</sup>) көп мүчөсүн:

(I)  $F(X, Y) = AX^2 + CY^2 + (Q - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C})$  көрүнүшүнө келтиребиз;

2.  $A = 0, D \neq 0$  болсо,  $\alpha = \frac{1}{2D}(G - \frac{E^2}{C}), \beta = \frac{E}{C}$  деп тандасак, анда (5<sup>B</sup>)

көп мүчөсү:

(II)  $F(X, Y) = CY^2 + 2DX$  көрүнүшүндө болот;

3.  $A = D = 0$  болсо,  $\alpha = 0, \beta = \frac{E}{C}$  деп тандап, (5<sup>B</sup>) көп мүчөсүн:

(III)  $F(X, Y) = CY^2 + (G - \frac{E^2}{C})$  көрүнүшүнө келтире алабыз.

#### 4.2.2 Экинчи тартиптеги ийрилердин каноникалык теңдемелери

Оху тик бурчтуу декарттык координаталар системасын буруу, параллель которуу менен экинчи тартиптеги  $P(x, y)$  көп мүчөсүн,  $O'X'Y'$  координаталар системасындагы  $F(X, Y)$  экинчи тартиптеги көп мүчөсүнө өзгөртүп жаздык. Демек, тегиздикте берилген (4<sup>A</sup>) көрүнүштөгү экинчи тартиптеги ийринин теңдемесин  $P(x, y) = 0$  көрүнүшүнөн башка

$$F(X, Y) = 0 \quad (6)$$

көрүнүшкө келтирүүгө болот. (6) көрүнүшүн үч учурга бөлдүк:

$$(6-I) \quad F(X, Y) = 0 \Leftrightarrow AX^2 + CY^2 + K = 0.$$

Мында  $A \neq 0, C \neq 0, K = G - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C}$ ;

$$(6-II) \quad F(X, Y) = 0 \Leftrightarrow CY^2 + 2DX = 0.$$

Мында  $A = 0, D \neq 0$ ;

$$(6-III) \quad F(X, Y) = 0 \Leftrightarrow CY^2 + (G - \frac{E^2}{C}) = 0. \text{ (Мында } A = D = 0 \text{);}$$

Тегиздикте берилген (4<sup>A</sup>) экинчи тартиптеги ийрилердин (6-I), (6-II), (6-III) түрлөрүнөн башка теңдемелери жок, ошондуктан алардын коэффициенттерин өзгөртүп (бөлүп, көбөйтүп), жаңы белгилөөлөрдү

киргизүү менен  $X, Y$  өзгөрүлмөлөрүн өзүбүз көнгөн  $x, y$  өзгөрүлмөлөрү менен кайра алмаштырып, тегиздиктин бетинде жайгашкан экинчи тартиптеги жалпак ийрилердин төмөндөгүдөй тогуз каноникалык теңдемесин түзөбүз:

1)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  - эллипс ( $a \neq 0, b \neq 0$ ), (6-I) теңдемеден келип чыгат;

2)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  - гипербола ( $a \neq 0, b \neq 0$ ), (6-I) теңдемеден алынат;

3)  $y^2 = 2px$  - парабола ( $p > 0$ ), (6-II) теңдемеден алынат;

4)  $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$  – түз сызыктар (6-I) теңдемеден алынат; (же  $ax - by = 0$  жана  $ax + by = 0$  түздөрү болот);

5)  $y^2 - a^2 = 0$  – түз сызыктар,  $y = \pm a$  (6-III) теңдемеден алынат;

6)  $y^2 = 0$  – түз сызык, (6-III) төн алынат;

7)  $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$  – бир гана  $0(0;0)$  чекити, (6-I) теңдемеден алынат;

8)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$  - бош көптүк (жалган эллипс), (6-I) теңдемеден алынат;

9)  $y^2 + a^2 = 0$  – бош көптүк (анткени оң сандардын суммасы нөлдөн чоң), (6-III) теңдемеден алынат;

Экинчи тартиптеги ийрилердин эң көп колдонулганы айлана, ал эллипстин теңдемесинен  $a = b$  болгондо,  $x^2 + y^2 = a^2$  көрүнүшүндө келип чыгат.

Экинчи тартиптеги ийрилер боюнча асман телолору да кыймылдашат. Мисалы, планеталар күндүн айланасында эллипстик орбита сызыгы боюнча кыймылдашып, ал эми кометалар эллипс, гипербола же парабола сызыктары боюнча кыймылдап жүрүшөт.

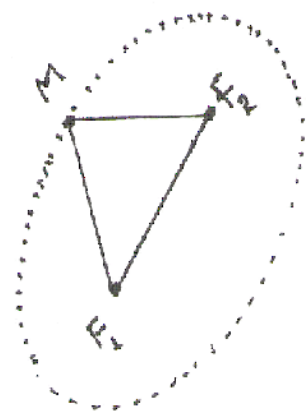
Экинчи тартиптеги ийрилердин жалпы  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + G = 0$  теңдемесинен эле, анын жогоруда көрсөтүлгөн 1) – 9) жалпак фигураларын кайсы бири болорун билүү үчүн атайын таблица түзөбүз. Ошондуктан экинчи тартиптеги ийрилердин жалпы теңдемесин коэффициенттеринен

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & G \end{vmatrix}$$

аныктагычтарын түзөбүз.  $\delta$  - аныктагычын теңдеменин чоң коэффициенттерин дискриминанты,  $\Delta$  - аныктагычын теңдеменин өзүнүн дискриминанты деп атап, алардын сандык маанилерине карап ийринин атын биле алабыз:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Чыныгы же жалган Эллипс	чекит
$\delta < 0$	Гипербола	өз ара кесилишүүчү түгөй түздөр
$\delta = 0$	Парабола	өз ара параллель чыныгы же жалган түгөй түздөр

I- таблица



4.2.1-чийме

– таблица туура болот.

Тегиздикте чексиз көп экинчи тартиптеги ийрилер жайгашкан, алардын баарынын эле теңдемеси  $(4^A)$  көрүнүшүндө боло бербейт. Мисалы,  $x^2 + 3y^2 + \sqrt{xy} + 2\sqrt{x} + y - 5 = 0$  экинчи тартиптеги ийринин теңдемеси  $(4^A)$  көрүнүштө эмес. Ошондуктан  $(4^A)$  көрүнүштөгү же болбосо бүтүн даража көрсөткүчтүү, коэффициенттери чыныгы сандар болгон гана экинчи тартиптеги ийрилерди 1) – 9) каноникалык теңдемелерге келтире алабыз жана алар үчүн гана жогорудагы 1 – таблица туура болот.

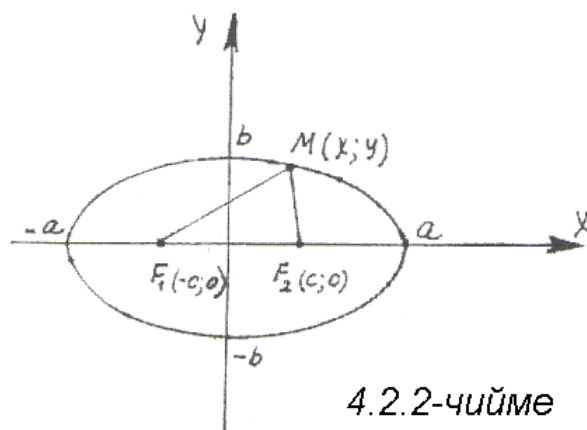
Тегиздиктеги  $Oxy$  тик бурчтуу координаталар системасын кандай өзгөртсөк да,  $(4)$  экинчи тартиптеги ийри өз абалын өзгөртпөй мурдагы калыбында кала берет, бирок байкоо жүргүзүүчү  $O$  чекити жана көрүү бурчтарын аныктаган координаттык октор өзгөрүлөт. Бул учурда ал ийрилер ар башка абалда көрүнүп, ага жараша математикалык моделдери (теңдемелери) ар башка жазылышта түзүлөт. Мисал катары жалпак фигураларды турган ордуна жылдырбай эле, алардын жайгашуу абалына ылайыкташкан  $O$  чекитин жана  $Ox$ ,  $Oy$  окторун жылдырып тандоо менен эллипс, гипербола, парабола ийрилеринин каноникалык (колдонууга ыңгайлуу тандалган) теңдемелерин түзүп көрсөтөлү.

### 4.2.3 Эллипс

**4.2.1 Аныктама.** Тегиздиктеги өзгөрүлмө  $M$  чекитинен берилген фокустар деп аталуучу  $F_1, F_2$  чекиттерине чейинки аралыктардын суммасы дайыма бир эле турактуу санга тең болсо, анда мындай  $M$  чекиттерин көптүгүн изин эллипс деп атайбыз.  $F_1$  жана  $F_2$  фокустарынын арасындагы  $\rho(F_1, F_2) = |F_1 F_2|$  аралыгы фокалдык аралык деп аталып, ал  $M$  чекитинен  $F_1, F_2$  фокустарына чейинки  $\rho(F_1, M) = |F_1 M|$ ,  $\rho(F_2, M) = |F_2 M|$  аралыктарын суммасынан кыска болот (4.2.1.-чийме), б.а.

$$\rho(F_1, F_2) \leq \rho(F_1, M) + \rho(F_2, M). \quad (7)$$

Эллипстин каноникалык теңдемесин түзүү үчүн  $F_1$  жана  $F_2$  чекиттери аркылуу өтүүчү,  $\overline{F_1 F_2}$  векторуна багытташ түз жүргүзүп, аны  $Ox$  абсцисса огу катарында кабыл алабыз.  $F_1 F_2$  кесиндисинин дал ортосунда жайгашкан чекитти  $O$  башталма катарында тандап,  $O$



чекитинен  $Ox$  огуна  $Oy$  перпендикуляр түзүн жүргүзүп, аны ордината катары эсептейбиз. Ушундай шарттарда тандалган тик бурчтуу  $Oxy$  координаталар системасында  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$ ,  $M(x; y)$  координаталуу чекиттер болушуп, фокалдык аралык  $|F_1 F_2| = 2c$  жана  $O$  башталмасынан фокустарга чейинки аралыктар  $|OF_1| = |OF_2| = c$  белгилүү, ал эми  $M(x; y)$  өзгөрүлмө чекит болот (4.2.2-чийме).

Эллипстин аныктамасы боюнча  $\rho(F_1, M) + \rho(F_2, M) = 2a$  турактуу берилген сан болот. Бул теңдештикти координаталары менен туюнтуп,  $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$  теңдештигине ээ болобуз. Радикалдан куткаруу максатында эки жагын тең квадратка көтөрүп,

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \text{ келип чыккан теңдештикти жөнөкөйлөтүп, } \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{cx}{a} \text{ көрүнүшкө келтиребиз.}$$

Барабардыктын эки жагын тең дагы бир жолу квадратка көтөрүп, окшош мүчөлөрүн топтогон соң  $\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 + y^2 = a^2 - c^2$  теңдештигине ээ болобуз. Эллипстин аныктамасы боюнча (7) ден  $2c < 2a$  же  $c < a$  же  $a^2 - c^2$  оң сан болгондуктан, аны сандын квадраты катарында

$b^2 = a^2 - c^2$  деп белгилеп  $\frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 + y^2 = b^2$ , эки жагын тең  $b^2$  санына бөлүп жиберип, эллипстин  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (8)

каноникалык теңдемесин келтирип чыгарабыз.

Ошентип эллипс  $O$  башталмасына жана  $Ox$ ,  $Oy$  окторуна карата симметриялуу жайгашкан жалпак фигура болот (4.2.2 – чийме). Тегиздикте эркин жайгашкан каалагандай эле эллипти (4.2.1 - чийме), атайын тандалган каноникалык  $Oxy$  тик бурчтуу координаталар системасында (параллель которуу, буруу менен тандалган) 4.2.2-чиймедеги абалда деп элестетип, (8) каноникалык теңдемеси менен моделдештирүүгө болот. Эгерде  $a = b$  болсо, (8) теңдемеси айлананын каноникалык теңдемесине айланат,  $a \neq b$  болсо, айлана  $Ox$  огуна карата  $\frac{b}{a}$  эсе кысылып эллипс кейпине келет.

Эллипстин эске тутуп калуучу айрым касиеттерин көрсөтөлү:

**1<sup>0</sup>.** Эгерде  $M_0(x_0; y_0)$  чекити эллипске таандык болсо, анда  $(-x_0; y_0)$ ,  $(-x_0; -y_0)$  жана  $(x_0; -y_0)$  чекиттери да эллипске таандык болушат. Анткени бул чекиттердин экөөсү  $M_0$  чекитине координаттык окторго карата, бирөөсү  $O$  башталмасына карата симметриялуу жайгашкан.

**2<sup>0</sup>.**  $(\pm a; 0)$ ,  $(0; \pm b)$  чекиттери эллипстин чокулары деп аталышат.

Ал эми эллипске таандык  $M(x; y)$  чекитинде  $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ ,  $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$  шарттары аткарылат.

**3<sup>0</sup>.** Эллипстин оң  $F_2(c; 0)$  жана сол  $F_1(-c; 0)$  эки фокусу болуп,  $|F_1 F_2| = 2c$  фокалдык аралык деп аталат.

**4<sup>0</sup>.**  $e = \frac{c}{a}$  саны эллипстин эксцентриситети деп аталып, ал айлананы кысуу менен эллипске айлантуу деңгээлин аныктайт.  $e = 0$  болсо, айлана

кысылбай айлана бойдон калат.  $e = 1$  болсо, айлана толук түз абалына чейин кысылган болот. Ошентип эллипсте  $0 < e < 1$  болот.

5°.  $x + \frac{a}{e} = 0$  жана  $x - \frac{a}{e} = 0$  түздөрү эллипстин директрисалары деп аталышат. Эллипс оң жана сол болгон эки директриса түздөрүнө ээ болот.

6°.  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$  байланышын пайдаланып, эллипстин тик бурчтуу

декарттык координаталар системасындагы  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  каноникалык

теңдемесин, полярдык координаталар системасында  $\rho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \varphi}$ ,

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$  көрүнүштө жаза алабыз.

Эллипске таандык  $M(x; y)$  чекитин координаталары полярдык координаталарда  $\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$  болуп көрсөтүлөт. Чынында эле, бул маанилер эллипстин каноникалык теңдемесин канааттандыраарын текшерип көрүүгө болот.

Мисалы,  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  эллипсинде  $a = 5$ ,  $b = 3$  болуп,  $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$  же  $c = 4$ , фокалдык аралык  $|F_1 F_2| = 2c = 8$  келип чыгат (4.2.3-чүймө).

$\begin{cases} x = 5 \cos \varphi, \\ y = 3 \sin \varphi \end{cases}$  маанилерин эллипстин теңдемесине койсок

$\frac{(5 \cos \varphi)^2}{25} + \frac{(3 \sin \varphi)^2}{9} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ , полярдык координаталарда жазылган эллипстин чекиттерин каноникалык теңдемени канааттандыраарын көрөбүз.

Эллипстин эксцентриситети  $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$ , директриса түздөрү

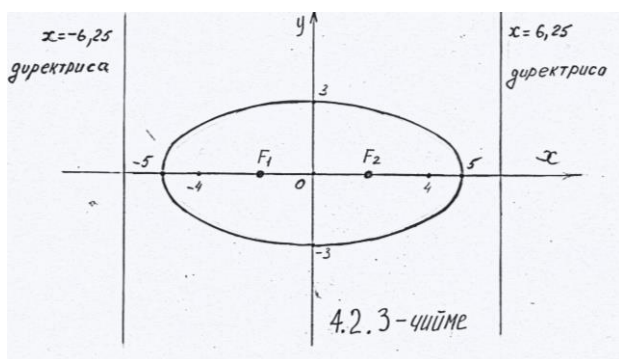
$x + \frac{5}{0,8} = 0$ ,  $x - \frac{5}{0,8} = 0$  же  $x = -6,25$ ,  $x = 6,25$  болушат.

Экинчи мисалда  $x^2 + y^2 = 100$  айланасын  $Ox$  огуна карата канча эсе кысуу менен  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$  эллипсин алууга болорун көрсөтөлү. Ал үчүн

айлананын теңдемесин өзгөртүп  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{100} = 1$  же  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} \cdot \frac{36}{100} = 1$  же

$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} \cdot \frac{9}{25} = 1$  жазуу менен, айланадагы  $M_0(x_0; y_0)$  чекити эллипсте

$M_1(x_0; y_1) = M_1(x_0; \frac{y_0 \cdot 9}{25})$  чекитине өтүп,  $Ox$  ке карата  $\frac{9}{25}$  эсе кысыларын көрөбүз.



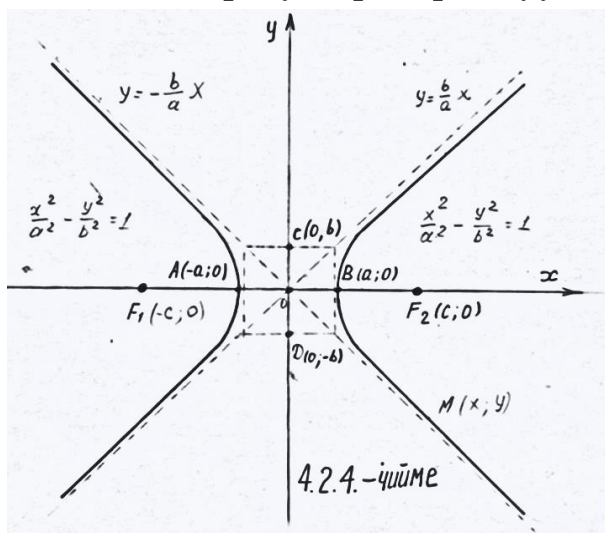
## 4.2.4 Гипербола

**4.2.2 Аныктама.** Тегиздикте эркин өзгөргөн  $M(x; y)$  чекиттеринен фокустар деп аталуучу эки  $F_1$  жана  $F_2$  чекиттерине чейинки

аралыктардын айырмасынын модулу дайыма бир эле турактуу санга тең болсо, анда мындай абалда өзгөргөн  $M(x; y)$  чекиттерин көптүгүн изин гипербола дейбиз.  $F_1, F_2$  чекиттерин аралыгы фокалдык аралык деп аталып, фокустардан  $M$  чекитине чейинки аралыктардын айырмасын модулуна узун болот:

$$\rho(F_1, F_2) > |\rho(F_1, M) - \rho(F_2, M)|. \quad (9)$$

Гиперболанын каноникалык теңдемесин түзүү үчүн  $Ox$  абсциссасы деп  $F_1$  жана  $F_2$  фокустары аркылуу өтүүчү түздү,  $O$  башталмасы деп  $F_1 F_2$



кесиндисин дал ортосунда жайгашкан чекитти,  $Oy$  ордината огу деп  $O$  чекитинен  $Ox$  ке жүргүзүлгөн перпендикуляр түздү алабыз. Ушундай ыкмада курулган каноникалык  $Oxy$  тик бурчтуу декарттык координаталар системасында  $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$

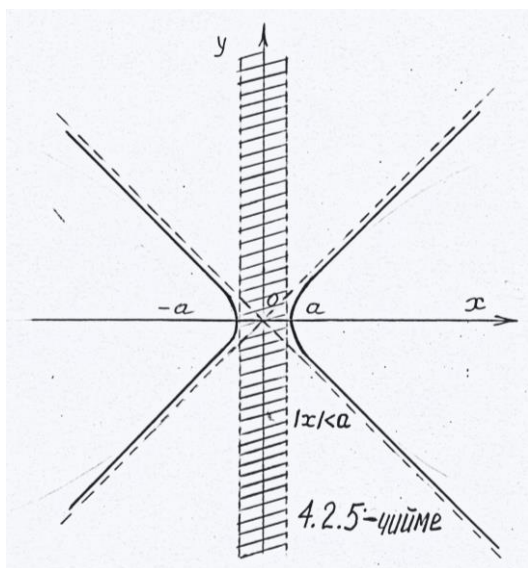


координаталуу чекиттери берилип,  $M(x; y)$  өзгөрүлмө чекит болсун(4.2.4-чийме).

Гиперболанын аныктамасы боюнча  $|\rho(F_1, M) - \rho(F_2, M)| = 2a$  белгилүү турактуу санына барабар болот. Фокалдык аралыгы да  $\rho(F_1, F_2) = 2c$  белгилүү болсо, анда жогорудагы теңдештик

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a, \quad \text{же} \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

көрүнүшкө келип, сол жактагы айырма оң болгондо « + » белгиси, сол жактагы айырма терс болгондо « - » белгиси алынат. Акыркы



теңдештиктеги тамырлардын бирин оң жагына өткөрүп, радикалдан куткаруу үчүн квадратка көтөрүп

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

жөнөкөйлөткөн соң,

$$\frac{cx}{a} - a = \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{ээ болобуз. Дагы}$$

бир жолу квадратка көтөрүп топтоштургандан кийин

$$\frac{c^2 - a^2}{a^2} \cdot x^2 - y^2 = c^2 - a^2 \quad \text{келип чыгат.}$$

Мындан (9) ду эске алып ( $a < c$ ),

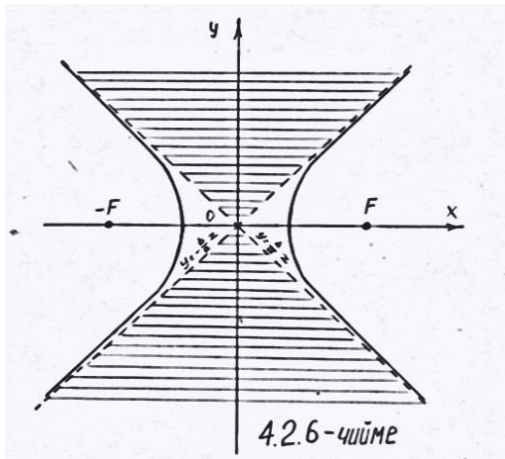
$c^2 - a^2$  оң санына  $b^2 = c^2 - a^2$  деген белгилөө киргизип, барабардыктын эки жагын тең  $b^2$  ка бөлүп жиберип, гиперболанын

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (10)$$

каноникалык теңдемесин келтирип чыгарабыз.

Гиперболага мүнөздүү айрым касиеттерди көрсөтөлү:

**1<sup>0</sup>.** Гипербола  $|x| < a$  тилкесин сыртында жайгашып,  $A(-a; 0)$ ,  $B(a; 0)$  чекиттери гиперболанын чокусу болот. АВ кесиндиси гиперболанын башкы огу деп аталат. Чынында эле  $M(x; y)$  гиперболада жайгашкан



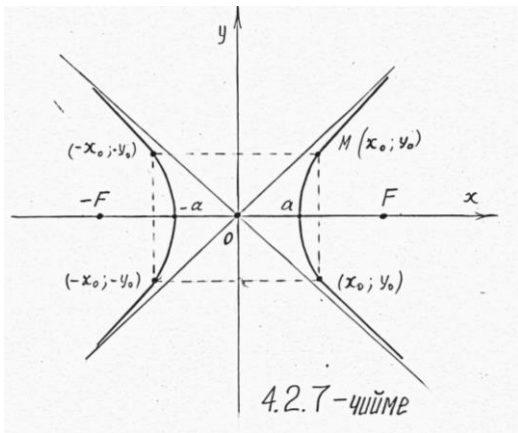
өзгөрүлмө чекит болсо,  $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$

болуп,

$|x| \geq a$  келип чыгат (4.2.5-чийме).

2<sup>0</sup>. Гипербола  $y = \pm \frac{b}{a}x$  түздөрүн

арасындагы  $Ox$  огунун чекиттери жайгашкан вертикалдык бурчтардын арасында жайгашат (4.2.6-чийме).



$y = -\frac{b}{a}x$  сол,  $y = \frac{b}{a}x$  оң асимптоталары

болуп, алар гиперболанын графигине  $|x| \rightarrow \infty$  умтулганда чексиз жакындап барат. Чынында эле  $M(x; y)$  чекити гиперболага таандык болсо, анда

$\frac{x^2}{a^2} > \frac{y^2}{b^2}$  болгондуктан,  $y^2 < \frac{b^2}{a^2}x^2$  же

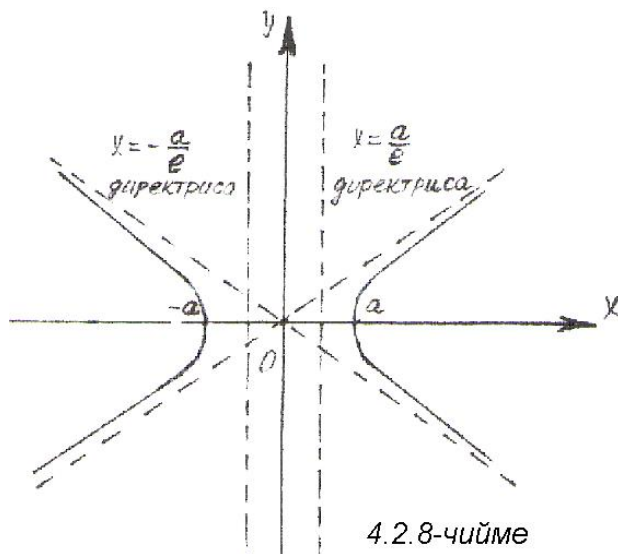
$|y| < \frac{b}{a}|x|$  болуп,  $M(x; y)$  чекити асимптота түздөрүнө жетпей, алардын арасында жайгашкан болот.

3<sup>0</sup>. Гиперболага  $Ox$  жана  $Oy$  координаттык октору симметрия борбору болот (4.2.7-чийме).

Чынында эле  $M_0(x_0; y_0)$  чекити гиперболага таандык болсо, анда  $(-x_0; y_0)$ ,  $(-x_0; -y_0)$ ,  $(x_0; -y_0)$  чекиттери да гиперболага таандык болот.

4<sup>0</sup>.  $e = \frac{c}{a}$  саны гиперболанын эксцентриситети деп аталып,  $e > 1$  болот.  $e$  саны гиперболанын кысылуу деңгээлин көрсөтүп,  $e$  чоңойгон

сайын гиперболанын эки бутагы тең куушурулат, ал эми ал кичирейип



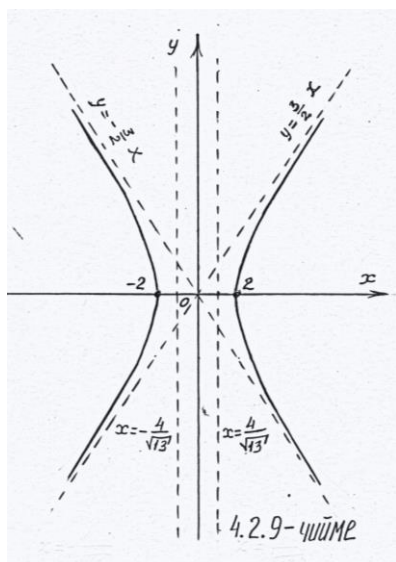
4.2.8-чийме

бирге жакындаган сайын бутактары кеңейип,  $e = 1$  болгондо эн чоң бутактуу гипербола болуп,  $x = \pm a$  түздөрүнө айланат.  $a = b$  болгон учурда гипербола тең жактуу деп аталып,

$$x^2 - y^2 = a^2 \text{ көрүнүштөгү}$$

теңдемеге ээ болот. Асимптоталары  $y = \pm x$  түздөрүнө айланат. Ал эми

$$x + \frac{a}{e} = 0 \text{ жана } x - \frac{a}{e} = 0 \text{ түздөрү}$$



4.2.9-чийме

гиперболанын директрисалары деп аталышат (4.2.8-чийме).

Мисалы,  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$  гиперболасында  $a=2, b=3,$

$$b^2 = c^2 - a^2 \text{ болгондуктан, } c^2 = b^2 + a^2 = 4 + 9, \\ c = \sqrt{13};$$

$|F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{13}$  – фокалдык аралык;  $F_1(-\sqrt{13};0),$   
 $F_2(+\sqrt{13};0)$  – фокустары;  $A(-2;0), B(2;0)$  – чокулары;

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ саны эксцентриситети жана}$$

$$\begin{cases} x + \frac{2}{\sqrt{13}} = 0, \\ \frac{2}{2} \end{cases} \text{ же } \begin{cases} x + \frac{4}{\sqrt{13}} = 0, \\ x - \frac{4}{\sqrt{13}} = 0 \end{cases} \text{ түздөрү директрисалар болушат.}$$

Асимптоталары  $y = \frac{3}{2}x, y = -\frac{3}{2}x$  түздөрү болот (4.2.9-чийме).

5°.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$  (11) гиперболасы (10) гиперболасына түйүндөш гипербола деп аталат (4.2.10-чийме).

6<sup>0</sup>.  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$  байланышын пайдаланып, гиперболанын тик бурчтуу

декарттык координаталар системасындагы каноникалык теңдемесин полярдык координаталар системасында

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{a^2} - \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1 \text{ же}$$

$$\rho^2 (b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi) = a^2 \cdot b^2 \text{ же}$$

$$\rho^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi} \text{ көрүнүштө жаза}$$

алабыз. Мындан  $b^2 = c^2 - a^2$  белгилөөсүн пайдаланып,

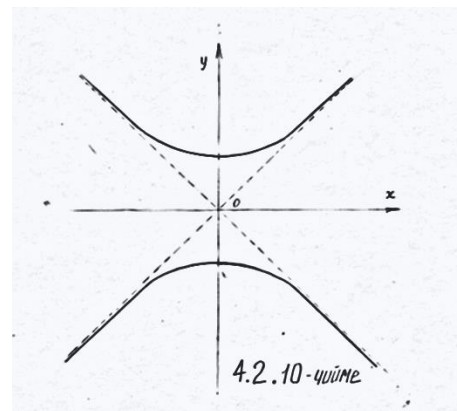
$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{(c^2 - a^2) \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi} = \frac{a^2 b^2}{c^2 \cos^2 \varphi - a^2} = \frac{b^2}{e^2 \cos^2 \varphi - 1}$$

$$\rho^2 = \frac{b^2}{e^2 \cos^2 \varphi - 1}$$

$$\arctg\left(-\frac{b}{a}\right) \leq \varphi \leq \arctg \frac{b}{a}$$

теңдемесине ээ болобуз.

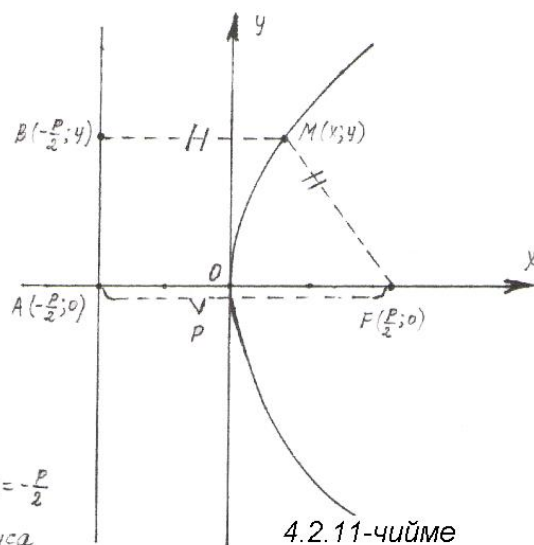
полярдык координаталардагы гиперболанын



## 4.2.5 Парабола

**4.2.3 Аныктама.** Тегиздикте берилген фокус деп аталуучу  $F$  чекитинен жана бул чекит аркылуу өтпөөчү директриса деп аталган түздөн бирдей узактыкта жайланышкан өзгөрүлмө  $M$  чекиттерин көптүгүн изи парабола деп аталат (4.2.11-чыйме).

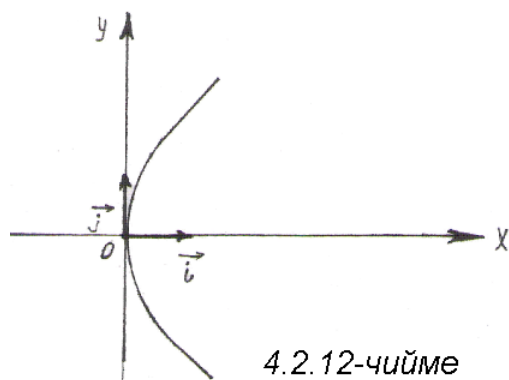
Фокустан директрисага чейинки аралыкты фокалдык параметр деп,  $p$  менен белгилейбиз. Параболанын каноникалык



теңдемесин түзүү үчүн  $Ox$  каноникалык координаттык системасын тандайбыз.

$Ox$  огун  $F$  фокусу аркылуу өтүп, директриса деп аталган  $x = -\frac{p}{2}$  түзүнө перпендикуляр болгондой алабыз.  $F$  фокусунан директрисага чейинки аралык  $p$  саны болсун. Бул аралыктын тең ортосунан  $Ox$  огуна перпендикуляр түз жүргүзүп, аны  $Oy$  ордината огу катарында кабыл алабыз.

Ушундай ыкмада тандалган каноникалык  $Ox$  координаталар



системасында фокус  $F(\frac{p}{2};0)$ , директриса менен  $Ox$  огун кесилишүү чекити  $A(-\frac{p}{2};0)$ , параболага таандык өзгөрүлмө чекит  $M(x; y)$  координаталарына ээ болушсун.  $M$  чекитинен директрисага түшүрүлгөн перпендикулярдын

директриса менен кесилишүү чекити  $B(-\frac{p}{2}; y)$  дейли. Параболанын

аныктамасы боюнча  $\rho(B, M) = \rho(M, F)$ , аны координаталары менен

жазуудан  $|x + \frac{p}{2}| = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2 + y^2}$  теңдештиги келип чыгат. Эки жагын тең

квадратка көтөрүп топтоштуруп

$$y^2 = 2px, \quad (12)$$

параболанын каноникалык теңдемесин алабыз.

1<sup>0</sup>. (12) параболасы  $Ox$  огун оң жагында жайгашып, чокусу  $O(0;0)$  чекити болот (4.2.12- чийме).

2<sup>0</sup>. Каноникалык  $Ox$  координаталар системасын  $Ox$  абсциссасы – параболанын жалгыз гана симметрия огу болот.

3<sup>0</sup>.  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$  байланышын пайдаланып, параболанын полярдык

координаталар системасындагы  $\rho = \frac{2\rho \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \quad (-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$

көрүнүштөгү теңдемесин жаза алабыз.

## 4.2.6 Эллипс, гипербола, парабола ийрилерине жүргүзүлгөн жаныма түздөр

Тегиздикте жайгашкан ийрилер  $y = f(x)$  функциясы менен берилип, ийриге таандык  $M_0(x_0; y_0)$  чекитинен ийриге жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (13)$$

көрүнүштө болору белгилүү.

### I. Эллипске жаныма түз

$M_0(x_0; y_0)$  чекити эллипсте жайгашкан чекит болсун, анда ал эллипстин (8) теңдемесин канааттандырып,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad (14)$$

барбардыгы аткарылат.

$M_0(x_0; y_0)$  чекити эллипстин I – чейректеги жаасында жайгашсын, б.а.

$x_0 > 0, y_0 > 0$  деп болжолдосок, анда (8) теңдемесинен

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (15)$$

келип чыгат. Анын туундусу

$$y' = \left( b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)' = b \cdot \frac{\left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)'}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = -\frac{bx}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

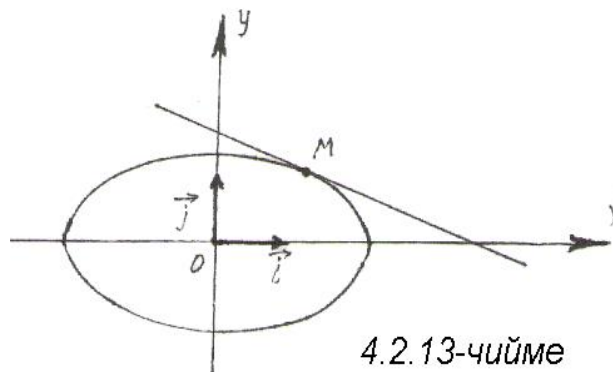
көрүнүштө эсептелет. Эллипске  $M_0(x_0; y_0)$  чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси (13) формуласына ылайык,

$$y - y_0 = -\frac{bx_0}{a^2\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}} \cdot (x - x_0)$$

көрүнүштө жазылат.  $M_0$  эллипске таандык болгондуктан, (15) боюнча

$$y_0 = b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \quad \text{маанисин ордуна}$$

коюп, жаныма түздүн теңдемесин



4.2.13-чйме

$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \cdot (x - x_0)$  көрүнүшкө келтиребиз. Кийинки өзгөртүүлөрдүн

жардамы менен жаныма түздүн теңдемесин  $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0$ , же

(14) тү эске алып, жыйынтыгында

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad (16)$$

көрүнүштө табабыз.

Ошентип (16) формуласына  $M_0(x_0; y_0)$  чекити эллипстин  $Oxy$  координаталар системасын бардык чейректеринде жайгашкан учурларында туура болуп,  $M_0(x_0; y_0)$  чекитинен эллипске жүргүзүлгөн жаныма түздүн жалпы теңдемеси болот (4.2.13-чийме).

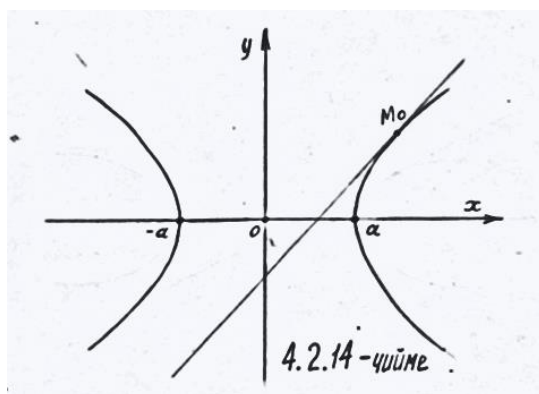
Мисал катарында  $M_0(-\sqrt{3}; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$  чекитинен  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  эллипсине жүргүзүлгөн жанымыма түздүн теңдемесин түзүүнү көрсөтөлү. Берилген чекит эллипстин теңдемесин канааттандырып,

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{9} + \left(\frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{4}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1,$$

эллипстин экинчи чейректеги жаасында жатат. (16) формуласына ылайык, эллипске бул чекиттен жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси

$$\frac{x \cdot (-\sqrt{3})}{9} + \frac{y \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}{4} = 1, \text{ же } -\frac{\sqrt{3}}{9}x + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}y - 1 = 0 \text{ көрүнүштө жазылат.}$$

## II. Гиперболага жаныма түз



Гиперболага таандык болгон  $M_0(x_0; y_0)$  чекитинен гиперболага жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси да жогорудагы эле ыкмада келтирип чыгарылып,

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad (17)$$

көрүнүштө болот (4.2.14-чийме).

## III. Параболага жаныма түз

Тегиздиктеги ийри  $y$  ке карата чечилген  $y = f(x)$  функциясы менен эмес,  $x$  ке карата чечилген  $x = g(y)$  функциясы менен берилсин. Бул учурда ийриге таандык  $M_0(x_0; y_0)$  чекитинен ийриге жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси

$$x - x_0 = g'(y_0) \cdot (y - y_0)$$

көрүнүштө жазылат.

Парабола  $y^2 = 2px$  же  $x = \frac{1}{2p} y^2$  теңдемеси менен берилип, туундусу

$x' = \frac{1}{2p} \cdot (y^2)' = \frac{1}{2p} \cdot 2y = \frac{y}{p}$  көрүнүштө эсептелгендиктен, параболага таандык болгон каалагандай  $M_0(x_0; y_0)$  чекитинен жүргүзүлгөн жаныма

$$x - x_0 = \frac{y_0}{p} (y - y_0) \text{ же } y_0 y - y_0^2 + px_0 - px = 0 \text{ же } y \cdot y_0 = p(x + x_0) \quad (18)$$

теңдемелерине ээ болот. Акыркы өзгөртүүдө  $M_0$  параболага таандык болгондуктан,  $y_0^2 = 2px_0$  теңдештиги эске алынды.

#### 4.2.7 Эллипстин, гиперболанын, параболанын айрым колдонулуштары

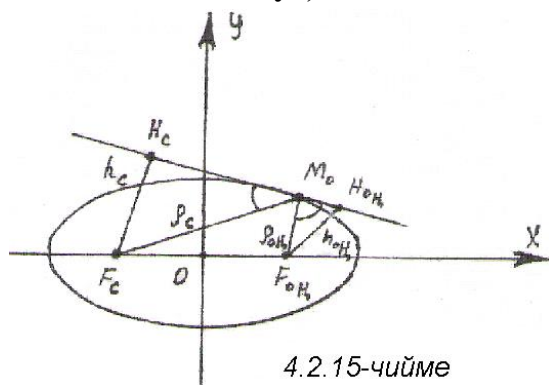
Эллипс, гипербола, парабола ийрилеринин аталыш теңдемелери асман телолорунун кыймылдоо жолдорун, математикалык тилде жазылган моделдери аркылуу таанып үйрөнүүдө кеңири колдонулат. Мисалы күндүн айланасындагы планеталардын, жердин айланасындагы айдын жана жасалма спутниктердин кыймылдары эллипстин теңдемеси аркылуу, ал эми кометалардын кыймылдары гипербола менен параболанын фрагменттери катарында жазылып, үйрөнүлүп келүүдө. Мындан сырткары практикада кеңири колдонулуп жүргөн энергия жыйноого жана жарык берүүгө байланышкан татаал техникалык приборлорду курууда эллипстин, гиперболанын, параболанын оптикалык касиеттери пайдаланылып жүрөт.

##### I. Эллипстин оптикалык касиети

Берилген  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  эллипсинин сол фокусун  $F_{\text{сол}}(-c; 0)$ , оң фокусун  $F_{\text{оң}}(c; 0)$  чекиттери деп эсептейли. Эллипске таандык болгон эркин



алынган  $M_0(x_0; y_0)$  чекитинен сол фокууска чейинки (фокалдык радиус)



аралык  $\rho_{сол} = \rho(F_{сол}, M_0)$ , оң фокууска чейинки (фокалдык радиус) аралык  $\rho_{оң} = \rho(F_{оң}, M_0)$  болсун дейли (4.2.15 - чийме).

Аралыктарды ченөө эрежеси боюнча

$$\begin{aligned} \rho_{сол} &= \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 + c)^2 + b^2(1 - \frac{x_0^2}{a^2})} = \sqrt{x_0^2 + 2x_0c + c^2 + b^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2}} = \\ &= \sqrt{(1 - \frac{b^2}{a^2})x_0^2 + 2x_0c + a^2} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x_0^2 + 2x_0c + a^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_0^2 + 2x_0c + a^2} = \sqrt{(\frac{cx_0}{a} + a)^2} = \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{cx_0}{a} + a \right| = |ex_0 + a| \text{ көрүнүштө табылат. (Бул өзгөртүүдө } e = \frac{c}{a}, c^2 + b^2 = a^2$$

жана  $a^2 - b^2 = c^2$  белгилөөлөрү колдонулду).

Ушундай эле ыкма менен оң фокалдык радиустун  $\rho_{оң} = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = |ex_0 - a|$  болорун көрсөтүү мүмкүн.

Берилген эллипске  $M_0$  чекитинен  $L$  жаныма түзүн жүргүзөлү. Анын теңдемеси  $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - 1 = 0$  түзү болуп ( $Ax + By + C = 0$ ,  $A = \frac{x_0}{a^2}$ ,  $B = \frac{y_0}{b^2}$ ,  $C = -1$ ), бул түздөн  $F_{сол}$  жана  $F_{оң}$  чекиттерге чейинки аралык

$$\rho(M^*, L) = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ формуланын негизинде}$$

$$h_{сол} = \rho(F_{сол}, L) = \frac{\left| \frac{x_0}{a^2}(-c) - 1 \right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \mu \cdot \left| 1 + \frac{x_0c}{a^2} \right|,$$

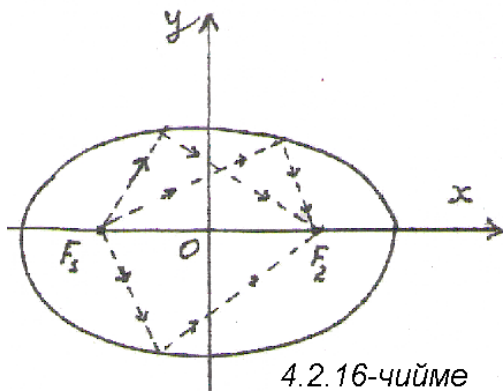
$$h_{оң} = \rho(F_{оң}, L) = \mu \cdot \left| 1 - \frac{x_0c}{a^2} \right| \text{ көрүнүштөрдө табылат } \left( \mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

нормалдаштыруучу көбөйтүүчү).

Пайда болгон  $\Delta F_{сол}H_{сол}M_0$  жана  $\Delta F_{оң}M_0H_{оң}$  тик бурчтуу үч бурчтуктары окшош экендигин байкайбыз (4.2.15 – чийме). Чынында эле алардын жактарынын катыштарын салыштыруудан кийин, алардын

$$\frac{h_{сол}}{\rho_{сол}} = \frac{\mu \left| 1 + \frac{x_0 c}{a^2} \right|}{|ex_0 + a|} = \frac{\mu \left| 1 + \frac{x_0 \cdot c}{a \cdot a} \right|}{|ex_0 + a|} = \frac{\mu \left| 1 + \frac{x_0 \cdot e}{a} \right|}{|ex_0 + a|} = \frac{\mu |a + x_0 e|}{a |x_0 e + a|} = \frac{\mu}{a};$$

$$\frac{h_{он}}{\rho_{он}} = \frac{\mu \left| 1 - \frac{x_0 c}{a^2} \right|}{|ex_0 - a|} = \frac{\mu}{a} \text{ барабар экендигин}$$

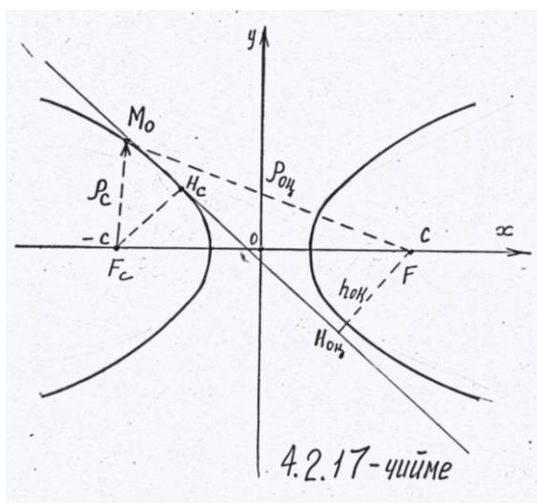


4.2.16-чийме

көрөбүз. Демек, үч бурчтуктардын  $M_0$  чекитиндеги бурчтарын синустары бурчка карама – каршы тараптагы каттеттердин ( $h_{сол}$  жана  $h_{он}$ ), гипотенузаларга ( $\rho_{сол}$  жана  $\rho_{он}$ ) болгон катыштары катарында барабар болот. Мындан  $\rho_{сол}$  жана  $\rho_{он}$  фокалдык

радиустары менен  $M_0$  чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түз сызыктын арасындагы бурчтар барабар болот деген тыянак чыгарабыз (4.2.15-чийме).

Бул өзгөчөлүк эллипстин оптикалык касиети катарында айтылып, эллипстин кайсы бир фокусуна жарык булагын орнотсок, анын шооласы эллипстин күзгүдөй жалтырак бетиндеги каалагандай  $M_0$  чекитинен чагылып экинчи фокууска топтолот (4.2.16-чийме).



4.2.17-чийме

## II. Гиперболанын оптикалык касиети

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ гиперболасында эркин}$$

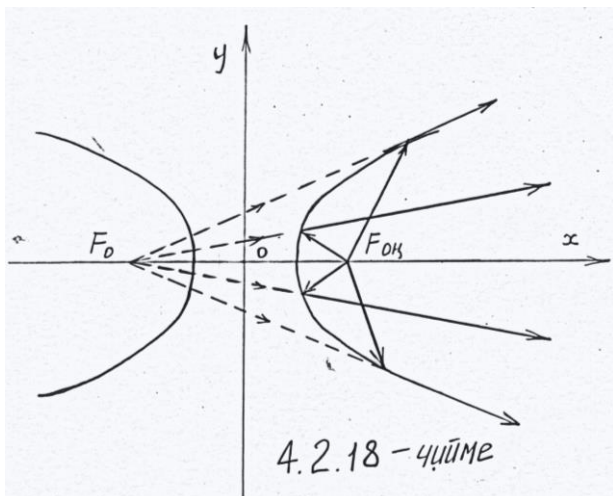
жайгашкан  $M_0(x_0; y_0)$  чекитин алып, эллипстин оптикалык касиетин келтирип чыгаруудагы аракеттерди кайталап,  $\Delta M_0 F_{сол} H_{сол}$  жана  $\Delta M_0 H_{он} F_{он}$  тик бурчтуу үч

бурчтуктары окшош болуп,  $M_0$  чокусундагы бурчтардын барабар экендигине ишенебиз (4.2.17-чийме).

Демек, гиперболанын бир фокусуна орнотулган жарык булагын шооласы гиперболанын күзгүдөй бетинен чагылып, экинчи фокусунан чыккан шооланын уландысы катарында көрүнүп тарайт (4.2.18-чийме).

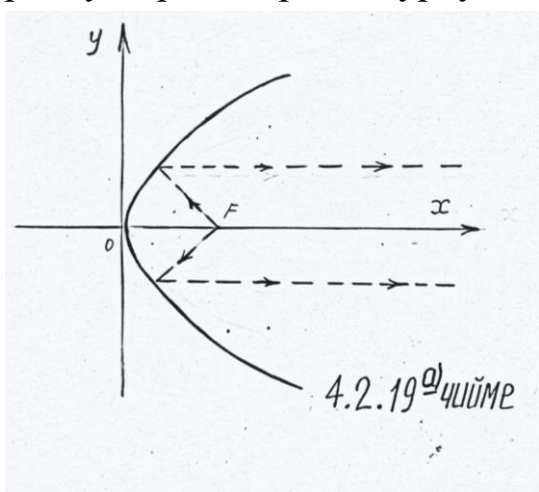
### III. Параболанын оптикалык касиети

Параболанын фокусуна орнотулган жарык булагын шооласы параболанын күзгүдөй бетинен чагылып, параболанын огуна параллель шоолалар болуп тарашат (4.2.19 а), б) - чиймелер).



#### 5. Мисалдар жана көнүгүүлөр

1. Фокалдык аралыгы 4 санына барабар болгон эллипске М (6;0) чекити таандык экендиги белгилүү болсо, анда эллипстин каноникалык теңдемесинен эксцентриситетин, директрисаларын, фокалдык радиустарын, жаныма түзүн жана аны менен фокалдык радиустардын түзгөн бурчун аныктагыла.



**Чыгаруу:**  $\triangleright$  М (6;0) чекити эллипске таандык болгондуктан анын теңдемесин канааттандырып,

$$\frac{6^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \text{ же } \frac{36}{a^2} = 1 \text{ же } a^2 = 36, a = 6$$

табылат.  $b^2 = a^2 - c^2$  теңдештигинен

$$b^2 = 6^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 36 - 4 = 32 \text{ же } b = \sqrt{32} \quad (a$$

$> 0, b > 0$  болгондуктан, «+» белгисин алабыз) келип чыгып, эллипстин

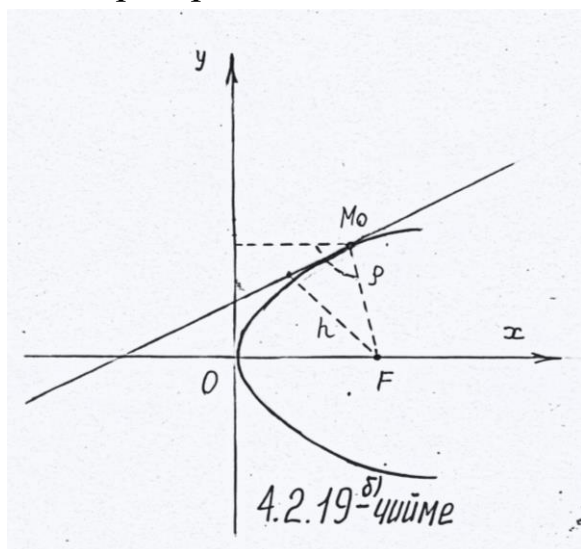
каноникалык теңдемеси

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1 \text{ көрүнүштө жазылат.}$$

Бул эллипсте эксцентриситет

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \text{ оң директриса } x = \frac{a}{e} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 18;$$

сол директриса



$$x = -\frac{a}{e} = -\frac{6}{\frac{1}{3}} = -18 \text{ түздөрү болушуп,}$$

эллипстеги  $M(6; 0)$  чекитин фокалдык радиустары

$$\rho_{\text{сол}} = \rho(F_1, M) = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = |\sqrt{a} + e$$

$$x_0| = |6 + \frac{1}{3} \cdot 6| = 8;$$

$$\rho_{\text{он}} = \rho(F_2, M) = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} =$$

$|a - e \cdot x_0| = |6 - \frac{1}{3} \cdot 6| = 4$  сандары, ал эми  $M(6; 0)$  чекитинен жүргүзгөн жаныма

түздүн теңдемеси  $\frac{x}{36} \cdot 6 + \frac{y}{32} \cdot 0 = 1$  же  $\frac{x}{6} - 1 = 0$  болот.

Жаныма түздүн фокалдык радиустар менен түзгөн бурчу

$$\sin \varphi = \frac{\mu}{a} = \frac{\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}}{a} = \frac{\sqrt{\frac{1}{6^2}}}{6} = \frac{6}{6} = 1, \text{ же}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ келип чыгат. } \triangleleft$$

**2.**  $4x^2 + 5y^2 - 7 = 0$  теңдемесин, эллипстин каноникалык теңдемесине келтиргиле.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген теңдемени  $4x^2 + 5y^2 = 7$  деп, эки жагын тең 7 ге бөлүп жиберсек  $\frac{4x^2}{7} + \frac{5y^2}{7} = 1$ , же  $\frac{x^2}{(\frac{\sqrt{7}}{4})^2} + \frac{y^2}{(\frac{\sqrt{7}}{5})^2} = 1$  эллипстин

каноникалык теңдемеси келип чыгат. Бул жерде  $a = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ,  $b = \frac{\sqrt{7}}{5}$ ,

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{7}{20}, \quad c = \sqrt{\frac{7}{20}} \text{ болот. } \triangleleft$$

**3.**  $2x^2 + 4y^2 - 6x - 2y - 1 = 0$  экинчи тартиптеги ийрисин эллипстин каноникалык теңдемесине өзгөртүп түзгүлө.

**Чыгаруу:** ▷ 1) Теңдеменин чоң коэффициенттерин дискриминанты

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0, \quad \text{ал эми теңдеменин дискриминанты}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -46 \neq 0 \quad \text{жана} \quad \delta = 8 > 0$$

болгондуктан, 1 - таблица боюнча эллипстин теңдемеси болот.

2) Берилген теңдеменин сол жагы ( $5^B$ ) көп мүчөсүнө  $A=2 \neq 0$ ,  $C=4 \neq 0$  окшош болуп, аны (6-Г) көрүнүшүнө келтире алабыз. Ал үчүн  $Oxy$  координаталар системасын  $X = x + 2$ ,  $Y = y + \beta$  эрежеси боюнча параллель которуп,  $O'X'Y'$  координаталар системасын түзөбүз.  $O'X'Y'$  координаталар системасындагы теңдемени жазалы.  $\alpha = \frac{D}{A} = -\frac{3}{2}$ ,

$$\beta = \frac{E}{C} = \frac{1}{4} \quad \text{тандоосуна жараша} \quad x = X - \alpha = X + \frac{3}{2}, \quad y = Y - \beta = Y - \frac{1}{4} \quad \text{деп}$$

алып, бул маанилерди теңдемеге коёбуз.

Теңдеменин сол жагы

$$2\left(X + \frac{3}{2}\right)^2 + 4\left(Y - \frac{1}{4}\right)^2 - 6\left(X + \frac{3}{2}\right) + 2\left(Y - \frac{1}{4}\right) - 1 =$$

$$= 2X^2 + 6X + \frac{9}{2} + 4Y^2 - 2Y + \frac{1}{4} - 6X - 9 + 2Y - \frac{1}{2} - 1 =$$

$$= 2X^2 + 4Y^2 - \frac{9}{2} + \frac{1}{4} - 9 - \frac{1}{2} - 1 = 2X^2 + 4Y^2 - \frac{23}{4} \quad \text{көрүнүшкө келип, экинчи}$$

тартиптеги ийри  $2X^2 + 4Y^2 - \frac{23}{4} = 0$  же  $2X^2 + 4Y^2 = \frac{23}{4}$  теңдемесине ээ

болот. Анын эки жагын тең  $\frac{23}{4}$  санына бөлүп жиберип,

$$\frac{2X^2}{\frac{23}{4}} + \frac{4Y^2}{\frac{23}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{\frac{23}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{23}{16}} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{23}{8}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{23}{16}}\right)^2} = 1 \quad \text{ээ болобуз.}$$

Өзгөрүлмөлөрдү көнүп калган  $x$ ,  $y$  көрүнүштө жазып, параллель которулган жаңы координаталык системага карата түзүлгөн

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{23}{8}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{23}{16}}\right)^2} = 1 \quad \text{эллипстин каноникалык теңдемесин алабыз.} \triangleleft$$

**4.** Фокалдык аралыктары 20 болгон,  $M(8\sqrt{5}; 12)$  чекити аркылуу өтүүчү гиперболанын теңдемесин түзгүлө.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Фокалдык аралык  $\rho(F_1, F_2) = 2c = 20$  болгондуктан,  $c = 10$  келип чыгат.  $M$  чекити гиперболага таандык, ошондуктан анын теңдемесин канааттандырат:

$$\frac{(8\sqrt{5})^2}{a^2} - \frac{(12)^2}{b^2} = 1 \text{ же } \frac{320}{a^2} - \frac{144}{b^2} = 1.$$

Экинчи жактан  $b^2 = c^2 - a^2 = 100 - a^2$  табылып, экөөнү бириктиргенде

$$\begin{cases} \frac{320}{a^2} - \frac{144}{b^2} = 1, \\ b^2 = 100 - a^2 \end{cases} \text{ теңдемелер системасы келип чыгат. Аны } a^2 \text{ жана } b^2$$

белгисиздерине карата чыгарып  $a^2 = 64$ ,  $b^2 = 36$  оң чечимдерине ээ

болубуз. Демек, изделүүчү гипербола  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$  каноникалык

теңдемесине ээ. Бул гипербола  $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{6}{8}x = \pm \frac{3}{4}x$  асимптота

түздөрүнө,  $e = \frac{c}{a} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$  эксцентриситетине,  $x \pm \frac{a}{e} = 0$  же

$x \pm \frac{8}{1,25} = 0 \Rightarrow x \pm \frac{32}{5} = 0 \Rightarrow x \pm 6,4 = 0$  директриса түздөрүнө ээ.

Гиперболага  $M(8\sqrt{5}; 12)$  чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түз

$$\frac{8\sqrt{5}}{64}x - \frac{12}{36}y = 1 \text{ же } \frac{\sqrt{5}}{8}x - \frac{1}{3}y = 0 \text{ теңдемесине ээ болот. } \triangleleft$$

**5.** Фокалдык аралыгы  $2c = 10$ , чокуларын арасындагы аралык  $2a = 8$  болгон гиперболанын каноникалык теңдемесин түзгүлө.

**Чыгаруу.**  $\triangleright$  Берилгендер боюнча  $c = 5$ ,  $a = 4$  маанилерин таап,

$b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$  же  $b = 3$  болорун көрөбүз. Демек,

гипербола  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  каноникалык теңдемесине ээ болот.  $\triangleleft$

**6.**  $y^2 = 3x$  параболасына таандык болгон, фокустан 1 аралыгында узактыкта жайгашкан чекитти аныктагыла.

**Чыгаруу.**  $\triangleright$  Параболанын каноникалык теңдемесиндеги  $2p = 3$  же

$p = \frac{3}{2}$  болуп, параболанын фокусу  $F(\frac{p}{2}; 0) = F(\frac{3}{4}; 0)$  координаталуу чекит

болору келип чыгат. Шарт боюнча параболага таандык  $M(x; y)$  чекити менен  $F(\frac{3}{4}; 0)$  фокусунун аралыгы  $\rho(F, M) = 1$  болушу керек. Демек

$$\sqrt{(x - \frac{3}{4})^2 + y^2} = 1, \text{ экинчи жактан } M(x; y) \text{ гиперболанын теңдемесин}$$

канааттандырат, б.а.  $y^2 = 3x$  болот. Эки шартты бириктирип,

$$\begin{cases} \sqrt{(x - \frac{3}{4})^2 + y^2} = 1, \\ y^2 = 3x \end{cases} \text{ теңдемелер системасын түзөбүз. Аны радикалдан}$$

куткарып,  $\begin{cases} (x - \frac{3}{4})^2 + y^2 = 1, \\ y^2 = 3x \end{cases}$  көрүнүшкө келтиребиз.  $x, y$  белгисиздерге

карата чыгарып  $x = \frac{1}{4}, y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  чечимдерин же фокустан 1 аралыгында

жайгашышкан эки  $M_1(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}), M_2(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$  чекиттерин табабыз.  $\triangleleft$

**7.**  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$  теңдемеси менен берилген ийринин геометриялык аталышын тактагыла.

**Чыгаруу.**  $\triangleright$  Берилген теңдеменин чоң коэффициенттерин дискриминанты  $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$ , теңдеменин дискриминанты

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ -3 & -4 & 25 \end{vmatrix} = 0 \text{ маанилерине ээ.}$$

Демек, бул теңдеме 1 – таблицкага ылайык бир гана чекитти мүнөздөйт.  $\triangleleft$

**Натыйжа.** Экинчи тартиптеги чексиз көп ийрилердин арасынан ( $4^4$ ) көрүнүштөгү теңдемелер менен берилген ийрилерди өзүнчө бөлүп карап, атайын тандалган (каноникалык) координаталар системасында ийрилерди бойлоп кыймылдоочу  $M(x; y)$  өзгөрүлмө чекиттеринин, ар бир абалдарын мүнөздөгөн математикалык моделдерин, же эстет калууга жана жазууга ыңгайлуу каноникалык теңдемелерин түздүк. Ошондуктан (8) – эллипстин, (10) – гиперболанын, (12) – параболанын каноникалык теңдемелерин колдонууда, эркин абалдагы каалагандай координаталар системасын (байкоо аппараттарын) пайдалана

албайбыз. Бул теңдемелердин ар бири өздөрү үчүн тандалган конкреттүү координаталар системасында гана туура болгондуктан, ал ийрилер менен байланышкан (жанымасын, нормалын, оптикалык касиеттерин ж.б.) таануу аракеттерин ошол тандалган координаталар системаларында гана жүргүзө алабыз.

### Көнүгүүлөр

**4.1.** Айлананын борборун жана радиусун тапкыла.

а)  $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 36$ ; (Жообу:  $O(2; 4)$ ,  $R=6$ )

б)  $(x+5)^2 + (y+\frac{3}{4})^2 = 17$ . (Жообу:  $O(-5; -\frac{3}{4})$ ,  $R=\sqrt{17}$ )

**4.2.** Төмөндөгү теңдемелер айлананы аныктай тургандыгын далилдегиле:

а)  $x^2 - 2x + 4y + y^2 - 20 = 0$ ; б)  $x^2 - 6x + 10y + y^2 + 9 = 0$ .

**4.3.** Төмөндөгү берилгендер боюнча эллипстин каноникалык теңдемесин түзгүлө (фокустары  $Ox$  огунда  $O$  башталмасына симметриялуу жайгашкан):

- 1) эллипстин жарым октору  $a=5$  жана  $b=2$  болсо;
- 2) эгерде чоң огу 10, фокалдык аралыгы 8 болсо;
- 3) кичине огу 24, фокалдык аралыгы 10 болсо;
- 4) фокалдык аралыгы  $2c=6$ , эксцентриситети  $e=\frac{3}{5}$  болсо;
- 5) чоң огу 20, эксцентриситети  $e=\frac{3}{5}$  болсо;
- 6) кичине огу 10, эксцентриситети  $e=\frac{12}{13}$  болсо;
- 7) директрисаларын аралыгы 5, фокалдык аралыгы  $2c=4$  болсо;
- 8) чоң огу 8, директрисаларын аралыгы 16 болсо;
- 9) кичине огу 6, директрисаларын аралыгы 13 болсо;
- 10) директрисаларын аралыгы 32, эксцентриситети  $e=\frac{1}{2}$  болсо.



(Жооптору: 1)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ ; 2)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ; 3)  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ ; 4)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ;  
 5)  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ ; 6)  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ ; 7)  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$ ; 8)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ ; 9)  $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$  же  
 $\frac{x^2}{117/4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ; 10)  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ .)

4.4. Төмөндөгү берилгендер боюнча эллипстин каноникалык теңдемесин түзгүлө (Фокустары  $Ox$  огунда  $O$  башталмасына симметриялуу жайгашкан):

- 1) октору  $2a = 10$ ,  $2b = 8$  болсо;
- 2) фокалдык аралыгы  $2c = 10$ , бир огу  $2b = 8$  болсо;
- 3) фокалдык аралыгы  $2c = 6$ , эксцентриситети  $e = \frac{3}{2}$  болсо;
- 4) бир огу  $2a = 16$  жана эксцентриситети  $e = \frac{5}{4}$  болсо;
- 5) асимптоталары  $y = \pm \frac{4}{3}x$ , фокалдык аралыгы  $2c = 20$  болсо;
- 6) директрисаларын аралыгы  $22\frac{2}{13}$ , фокалдык аралыгы  $2c = 26$  болсо;
- 7) бир огу  $2b = 6$ , директрисаларын аралыгы  $\frac{32}{5}$  болсо;
- 8) директрисаларын аралыгы  $\frac{8}{3}$ , эксцентриситети  $e = \frac{3}{2}$  болсо;
- 9) асимптоталары  $y = \pm \frac{3}{4}x$ , директрисаларын аралыгы  $12\frac{4}{5}$  болсо;

(Жооптор: 1)  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ ; 2)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ; 3)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ ; 4)  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ ;  
 5)  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ; 6)  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ ; 7)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ; 8)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ ; 9)  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ .)

4.5. Чокусу  $O$  башталмасында жайгашкан төмөндөгү параболалардын каноникалык теңдемесин түзгүлө.

- 1)  $Ox$  огуна симметриялуу болуп,  $x \geq 0$  жарым тегиздигиндеги параболаны  $p = 3$  параметри боюнча;
- 2) Парабола  $Ox$  огуна симметриялуу болуп,  $x \leq 0$  жарым тегиздигинде жайгашып, параметри  $p = 0,5$  болсо;

3) Парабола  $Oy$  огуна симметриялуу болуп,  $y \geq 0$  жарым тегиздигинде жайгашса,  $p = \frac{1}{4}$  параметри боюнча;

4) Парабола  $Oy$  огуна симметриялуу болуп,  $y \leq 0$  жарым тегиздигинде жайгашса,  $p = 3$  параметри боюнча.

(Жооптору: 1)  $y^2 = 6x$ ; 2)  $y^2 = -x$ ; 3)  $x^2 = \frac{1}{2}y$ ; 4)  $x^2 = -6y$ .)

4.6. Төмөндөгү берилгендер боюнча чокулары координата башталмасында жайгашкан параболанын каноникалык теңдемелерин түзгүлө:

1) Парабола  $Ox$  огуна симметриялуу жайгашып,  $B(-1;3)$  чекити аркылуу өтсө;

2) Парабола  $Oy$  огуна симметриялуу жайгашып,  $C(1;1)$  чекити аркылуу өтсө;

3) Парабола  $Oy$  огуна симметриялуу жайгашып,  $D(4;-8)$  чекити аркылуу өтсө.

(Жооптору: 1)  $y^2 = 4x$ ; 2)  $y^2 = -9x$ ; 3)  $x^2 = y$ ; 4)  $x^2 = -2y$ .)

4.7. Төмөндөгү теңдемелер менен берилген ийрилдердин түрүн аныктагыла.

а)  $x^2 + 2y + 4x - 4y = 0$ ;

б)  $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ ;

в)  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$ ;

г)  $xy + x + y = 0$ ;

д)  $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$ ;

е)  $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$ .

Жооптору: а) эллипс  $\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{3} = 1$ , борбору  $O'(-2;1)$ ,  $O'X$  чоң огу  $Ox$  огуна

параллель; б) гиперболла  $\frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{9} = 1$ , борбору  $O'(-1;2)$ ,  $O'X$  чыныгы огуна

бурчтук коэффициенти 3; в) парабола  $Y^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}X$ , борбору  $O'(3;2)$ ,  $O'X$  огуна

параболанын ийрейүү жагына багытталган вектору  $\{-2;-1\}$ ;

г) Борбору  $O'(-1;1)$  болгон гиперболла, асимптоталары координаттык окторго параллель;

д) эки  $x - y - 1 = 0$ ,  $x - 4y + 2 = 0$  өз ара кесилишүүчү түздөр; е) Өз ара параллель

$2x - 3y + 1 = 0$ ,  $2x - 3y - 2 = 0$  түгөй түздөр.)

## § 4.3 Экинчи тартиптеги беттер

### 4.3.1 Экинчи тартиптеги беттердин жалпы теңдемеси жана аны өзгөртүп түзүү

Үч ченемдүү  $R^3$  мейкиндигинде берилген тик бурчтуу  $Oxyz$  декарттык координаталар системасында, ар бир  $M(x; y; z)$  чекити үчтүк координаталар менен сүрөттөлгөндүктөн, бул мейкиндикте жайгашкан каалагандай объект үч өлчөмдүү фигура болуп, өзгөрүлмө  $M$  чекиттеринен куралган деп түшүнөбүз. Ошондуктан каалагандай үч өлчөмдүү фигура, үч өзгөрүлмөлүү

$$F(x, y, z) = 0 \quad (19)$$

көрүнүштөгү айкын эмес функция же  $z$  ке карата чыгарылган

$z = f(x, y)$  эки өзгөрүлмөлүү айкын функция түрүндөгү теңдеме менен мүнөздөлөт.

(19) теңдеменин сол жагында коэффициенттери чыныгы сандар, өзгөрүлмөлөрү бүтүн даражалуу көп мүчө турган учурду карайбыз. Көп мүчөдөгү  $x, y, z$  өзгөрмөлөрүн эң чоң даражасы, анын тартиби деп аталат. Экинчи тартиптеги, коэффициенттери чыныгы сандар болгон үч өзгөрмөлүү теңдемени жалпы учурда

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (19^A)$$

көрүнүштө жазабыз. Бул жерде  $\forall i, j: a_{ij} \in R; i, j \in N$  жана өзгөрмөлөрдүн эң чоң даражаларын коэффициенттери бир учурда нөл болбойт деп алынат, же ал шарт

$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 > 0$  көрүнүштө жазылат. (19<sup>A</sup>) теңдемеси менен сүрөттөлгөн фигураны экинчи тартиптеги бет деп айтабыз.

$R^3$  мейкиндигинде чексиз көп экинчи тартиптеги беттер жашайт, бирок алардын баары үчүн эле (19<sup>A</sup>) жалпы теңдеме боло албайт. Себеби экинчи тартиптеги ийрилдердин (4<sup>A</sup>) теңдемесиндей эле, (19<sup>A</sup>) теңдемесине коэффициенттери чыныгы сандар, өзгөрүлмөлөрүн даражалары оң бүтүн сандар болсун деген шарттар коюлган.

$\mathbb{R}^3$  мейкиндигинде жайгашкан экинчи тартиптеги ийрилери, кайсы бир экинчи тартиптеги беттердин тегиздиктер менен кесилиш сызыктары катары эсептейбиз.

Охуз тик бурчтуу декарттык координаталар системасын параллель которуу, буруу менен өзгөртүп түзгөнүбүзгө карабай, экинчи тартиптеги беттер өзгөрбөгөн калыбында реалдуу сакталып кала беришет. Бирок алардын математикалык моделдери болгон теңдемелер, ар бир О башталмасы (байкоочу турган чекит) жана координаттык октор жана октанттар (көрүү талаасы) өзгөргөн сайын өзгөрүлүп, жаңы бурулган же которулган өзгөрмөлөргө карата ар башка жазылат.

Охуз координаталар системасын ыңгайлаштырып тандоо менен, экинчи тартиптеги беттердин (19<sup>A</sup>) теңдемесин каноникалык теңдемелер деп аталуучу төмөндөгүдөй он жети көрүнүштөгү теңдемелерге келтирүүгө болот:

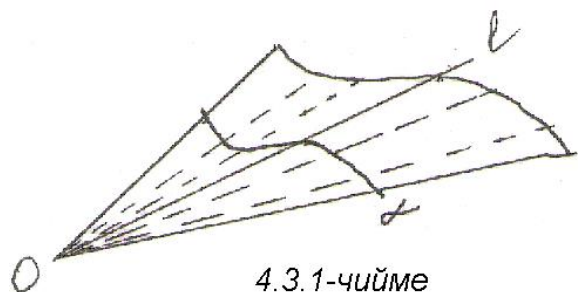
- 1)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ; 2)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ ;
- 3)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ; 4)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ ;
- 5)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ ; 6)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;
- 7)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; 8)  $y^2 = 2px$ ;
- 9)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ ; 10)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ;
- 11)  $y^2 - a^2 = 0$ ; 12)  $y^2 = 0$ ; 13)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ ;
- 14)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ ; 15)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ ;
- 16)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ ; 17)  $y^2 + a^2 = 0$ .

Мында  $a, b, c, p$  сандары нөлдөн айырмалуу оң чыныгы сандар деп алынат. Бул каноникалык теңдемелер менен сүрөттөлгөн фигураларга токтололу. 15), 16), 17) теңдемелери  $\mathbb{R}^3$  мейкиндигиндеги бош көптүктү сүрөттөйт, анткени оң сандардын суммасы нөлгө же терс санга барабар болбойт. 14) – теңдеме мейкиндиктеги жалгыз бир  $0(0;0;0)$  чекитин

сүрөттөйт. 13) – теңдеме  $Oz$  координата огун сүрөттөйт, анткени  $Oz$  огунун каалагандай чекитинде  $x=0, y=0$  шарты аткарылат. 12) – теңдеме  $xOz$  координаттык тегиздигин чекиттерин сүрөттөсө, 11) – теңдеме  $xOz$  координаттык тегиздигине параллель  $y = a$  жана  $y = -a$  эки тегиздиктерди сүрөттөйт. 10) – теңдеме менен  $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$  же

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \text{ жана } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \text{ түздөрү сүрөттөлөт.}$$

1) - 9) теңдемелери менен жаңы геометриялык объекттер сүрөттөлүп, алардын ар бирине өз - өзүнчө токтолуп өтөбүз.



4.3.1-чийме

### 4.3.2 Конустук беттер

Экинчи тартиптеги 9) – каноникалык теңдеме менен аныкталган бет конустук бетти түзөрүн көрсөтөлү. Мейкиндикте эркин жайгашкан  $\gamma$  ийрисин жана

андан обочо жайланышкан  $O$  чекитин алып,  $O$  чекитинен жана  $\gamma$  ийрисин ар бир чекитинен өтүүчү чексиз көп  $\ell$  түздөрүн жүргүзөлү. Мындай  $\ell$  түздөрүн бардыгында жайгашкан чексиз сандагы өзгөрүлмө  $M$  чекиттерин көптүгүнүн изи, конустук бет деп аталат (4.3.1-чийме).

$\gamma$  - конустук беттин багыттоочу ийри,  $O$  чокусу,  $\ell$  түзүүчүсү деп аталат.

**4.3.1 Аныктама.** Эгерде берилген  $F(x, y, z)$  функциясы каалагандай  $t > 0$  санына карата

$$F(tx, ty, tz) = t^q F(x, y, z)$$

шартына баш ийсе, анда  $F(x, y, z)$  функциясын  $q$  – даражадагы бирдей тектүү функция деп айтабыз.

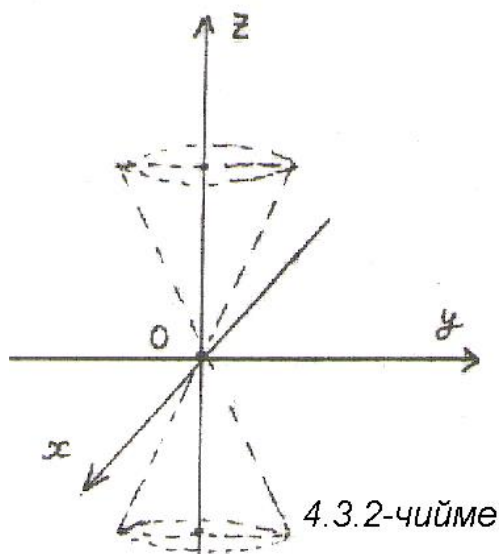
(Эскертүү. Каалагандай эле функция «нөл» – даражадагы бирдей тектүү функция болот).

Эгерде  $F(x, y, z) = 0$  көрүнүштө жазылган экинчи тартиптеги беттин теңдемесинде,  $F(x, y, z)$  бирден чоң даражалуу бирдей тектүү функция болсо, анда ал теңдеме сүрөттөгөн бет конустук бет болот.

▷ Айталы  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  чекити экинчи тартиптеги  $F(x, y, z) = 0$  бетинде жайгашып,  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  болсун.  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > 0$  же алар бир

учурда нөлгө барабар болушпайт деп эсептейли.  $O(0;0;0)$  чекити жана  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  чекити аркылуу  $\ell$  түзүн жүргүзөлү.  $O$  чекити да ушул бетке жайгашкандыктан, беттин  $F(0,0,0) = 0$  теңдемесин канааттандырат.  $\ell$  түз сызыгынын параметрдик теңдемесин жазалы

$$\begin{cases} x - 0 = t(x_0 - 0), \\ y - 0 = t(y_0 - 0), \\ z - 0 = t(z_0 - 0), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = tx_0, \\ y = ty_0, \\ z = tz_0. \end{cases}$$



Мындан  $F(x, y, z) = F(tx_0, ty_0, tz_0) = t^q F(x_0, y_0, z_0) = t^q \cdot 0 = 0$ , ( $q \geq 1$ ) келип чыгып,  $(x; y; z)$  өзгөрүлмө чекиттери ушул эле бетке таандык экендиги же  $F(x, y, z) = 0$  болору келип чыгат. Демек,  $F(x, y, z) = 0$  теңдемеси конустук бетти аныктайт.

Биздеги 9) – теңдеменин сол жагы да даражасы бирден чоң же экинчи даражадагы *бирдей тектүү* функция болот. Чынында эле

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \text{ десек,}$$

$$\begin{aligned} F(tx, ty, tz) &= \frac{(tx)^2}{a^2} + \frac{(ty)^2}{b^2} - \frac{(tz)^2}{c^2} = t^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) = \\ &= t^2 F(x, y, z) \end{aligned}$$

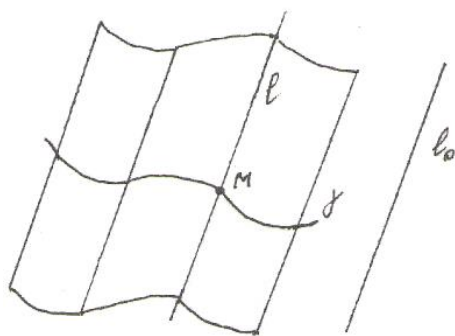
келип чыгат. Ошондуктан  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  теңдемеси конустук бетти сүрөттөйт (4.3.2-чийме).  $\triangleleft$

### 4.3.3 Цилиндрдик беттер

Он жети каноникалык теңдемелери менен берилген экинчи тартиптеги беттердин

8)  $cy^2 = 2px$ ; 7)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; 6)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  теңдемелери, мейкиндикте цилиндрдик беттерди сүрөттөшөт.

▷ Цилиндрдик беттин кандай түзүлөрүн көрсөтөлү. Мейкиндикте



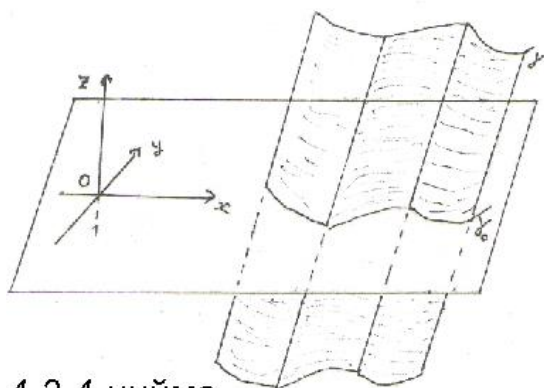
4.3.3- чийме

эркин жайгашкан  $\gamma$  ийриси жана  $l_0$  түзү берилсин.  $\gamma$  ийрисин ар бир  $M$  чекиттеринен  $l_0$  түзүнө параллель  $l$  түздөрүн жүргүзөбүз. Мындай  $l$  түздөрүн көптүгү мейкиндикте цилиндрдик бетти аныктайт (4.3.3- чийме).

$\gamma$  ийриси цилиндрдик беттин багыттоочусу,  $l_0$  түзү цилиндрдик беттин түзүүчүсү деп

аталышат.

Охуз тик бурчтуу декарттык координаталар системасын  $Oz$  огун  $l_0$  түзү деп алып,  $\gamma$  ийрисин ар бир чекитинен  $l_0 = Oz$  огуна параллель

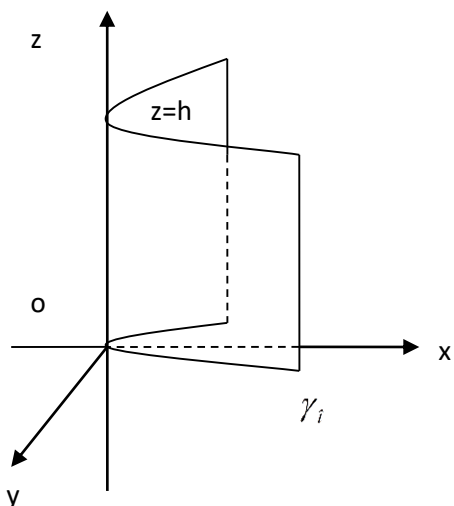


4.3.4-чийме

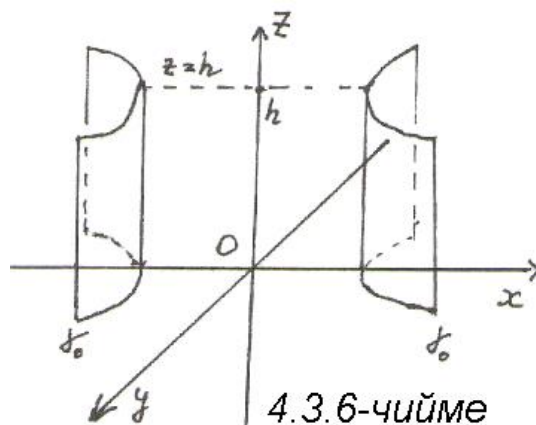
түздөрдү жүргүзүү менен,  $z = 0$  болгон  $Oxy$  координаттык тегиздигине перпендикуляр цилиндрдик бетти түзөбүз (4.3.4-чийме).

Бул цилиндрдик бет  $Oxy$  координаттык тегиздиги менен кесилишет, кесилишүү сызыгы  $\gamma_0$  болсун дейли.  $\gamma_0$  ийрисин бардык чекиттери  $M(x; y; 0)$

координаталарына ээ болот, анткени  $Oxy$  тегиздигинде  $z = 0$  болот, б.а. цилиндрдик беттин теңдемеси  $F(x, y, z) = 0$  болсо,  $\gamma_0$  ийрисин абалында бул теңдеме  $F(x, y) = 0$  көрүнүшкө келет. Ошондуктан 8), 7), 6) теңдемелерде  $z = 0$  болгон абалдагы цилиндрдик беттин теңдемеси жазылган деп түшүнөбүз. Демек,  $y^2 = 2px$  каноникалык теңдемеси менен параболалык цилиндрдин бети (4.3.5-чийме) сүрөттөлгөн.



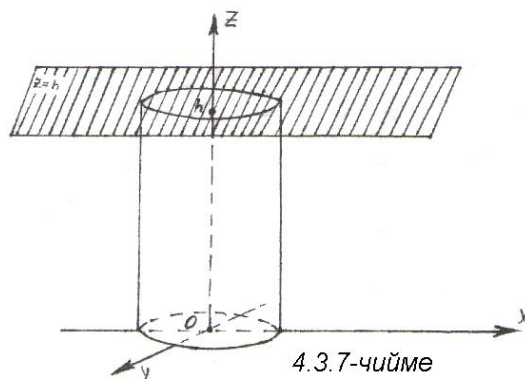
4.3.5-чыйме



4.3.6-чыйме

Ал эми  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  каноникалык теңдемеси менен гиперболалык цилиндр сүрөттөлгөн (4.3.6 чыйме).

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  каноникалык теңдемеси менен эллиптикалык цилиндрдин бети сүрөттөлүп (4.3.7-чыйме), сөз кылынган



4.3.7-чыйме

үч теңдеме тең  $z = h$  кандай маанилерди кабыл алганынан көз каранды болбойт, анткени  $z = h$  тегиздиги цилиндрдик беттерди бийиктиктен кесүүчү тегиздик гана боло алат. <

### 4.3.4 Айлануудан пайда болгон беттер

Жогоруда айтылган он жети каноникалык теңдемелер менен берилген экинчи тартиптеги беттердин алгачкы төртөөсү айлануудан пайда болгон беттерди түзүшөт. Алар төмөндөгүлөр:

- 1)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  эллипсоид;
- 2)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$  кош беттүү гиперболоид;
- 3)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  бир беттүү гиперболоид;



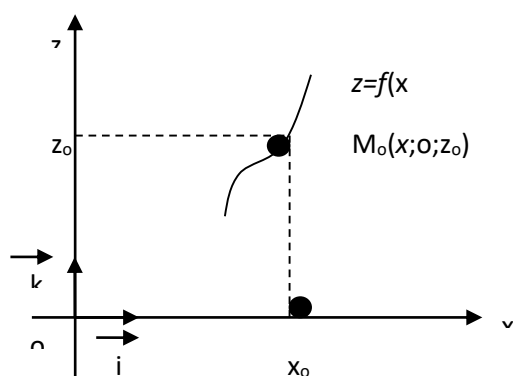
$$4) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0 \text{ эллипстик параболоид}$$

аталыштары менен белгилүү.

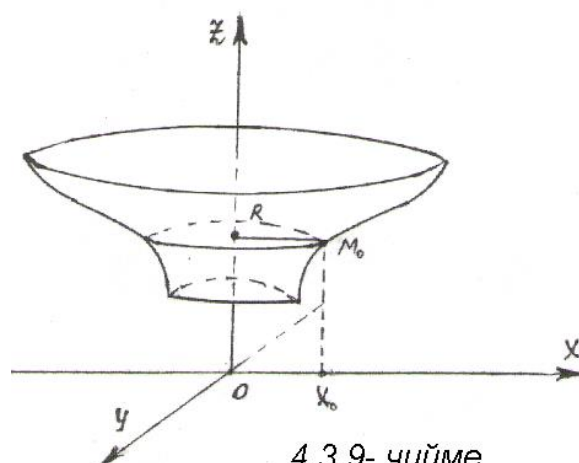
Башында айлануудан пайда болгон беттер жөнүндө жалпы түшүнүк берип, андан кийин 1) - 4) экинчи тартиптеги беттерге токтолойлу.

$Oxyz$  тик бурчтуу декарттык координаталар системасын  $Oxz$  координаттык тегиздигинде  $z = f(x)$ ,  $x \geq 0$  теңдемеси менен берилген  $\gamma$  ийриси карайлы (4.3.8-чийме). Бул ийрини  $Oz$  огун айланасында толук айлантып чыксак, анда мейкиндикте кандайдыр бир айлануудан пайда болгон бетти сызып өтөт (4.3.9- чийме).

Айлануудан пайда болгон беттин теңдемесин түзүү үчүн  $\gamma$  ийрисинде эркин жайгашкан  $M_o(x_o; o; z_o)$  чекитин алалы.  $\gamma$  ийрисин  $Oz$  огун айланасында толук айлантканда  $M_o$  чекити радиусу  $R = x_o$  болгон айлананы чийет.



4.3.8-чийме



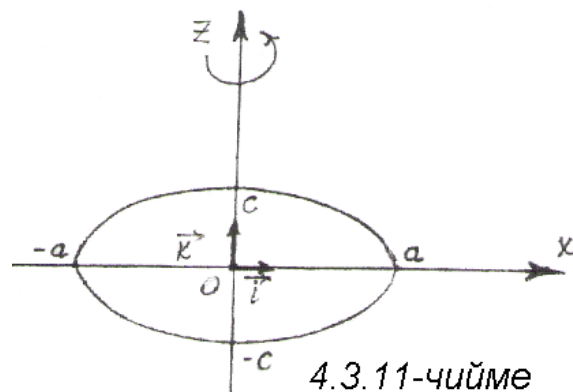
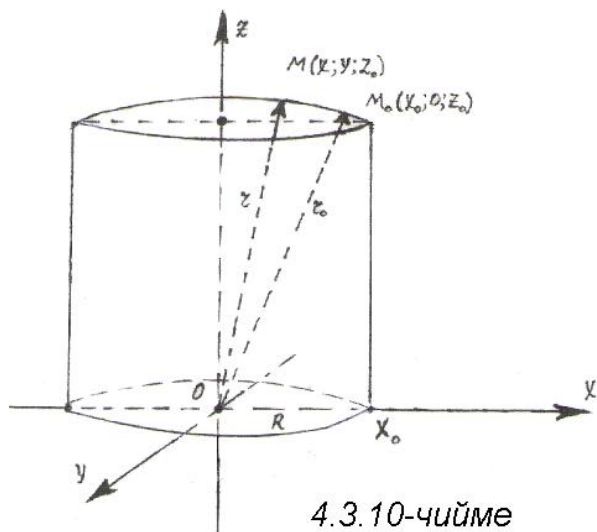
4.3.9- чийме

Бул айлананын  $Oxy$  же  $z = 0$  координаттык тегиздигиндеги проекциясы  $x^2 + y^2 = x_o^2$  теңдемеси менен берилген айлана болот (4.3.10-чийме).

Ошондуктан  $M_o$  чекитин айлантуудан пайда болгон айлананын теңдемеси, айланадагы  $M(x; y; z_o)$  чекиттерине карата

$|\overrightarrow{OM_o}| \equiv r_o = |\overrightarrow{OM}|_{\text{песек}}$ ,  $r_o^2 = x_o^2 + z_o^2$  же  $z_o^2 = r_o^2 - x_o^2 = r_o^2 - (x^2 + y^2)$  эске алсак,  $z_o^2 = r_o^2 - (x^2 + y^2)$  көрүнүшкө келет.  $M_o(x_o; o; z_o)$  чекити  $\gamma$  ийрисинен эркин тандалгандыктан, акыркы теңдеме ийринин бардык  $M(x; o; z)$  чекиттери үчүн туура болуп,  $z^2 = r^2 - (x^2 + y^2)$  же  $z = \pm \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$  көрүнүшкө келет, же жалпы учурда айлануудан пайда болуп,  $\sqrt{x^2 + y^2}$

өзгөрүлмө чоңдугуна карата  $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$  көрүнүштөгү функция катарында жазылган теңдеме болот.



### I. эллипсоид.

$Oxyz$  тик бурчтуу декарттык координаталар системасын  $Oxz$  координаттык тегиздигинде  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $a > 0$ ,  $c > 0$  эллипси берилсин (4.3.11-чийме). Аны  $Oz$  огун айланасында айлантуудан келип чыккан бетти эллипсоид деп атап,

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (20)$$

теңдемеси менен сүрөттөйбүз (4.3.12-чийме). Эгерде (20) теңдемеси менен берилген эллипсоидди  $Oy$  огун бойлото

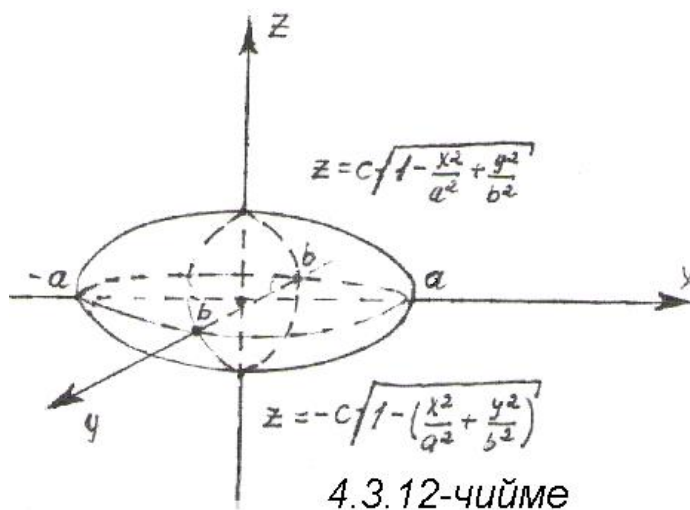
$$k = \frac{b}{a} \leq 1 \quad \text{коэффициенти}$$

боюнча кыссак, же (20) теңдемесине  $y$  тин ордуна

$\frac{a}{b} \cdot y$  өзгөрүлмөсүн койсок,

жалпы көрүнүштөгү

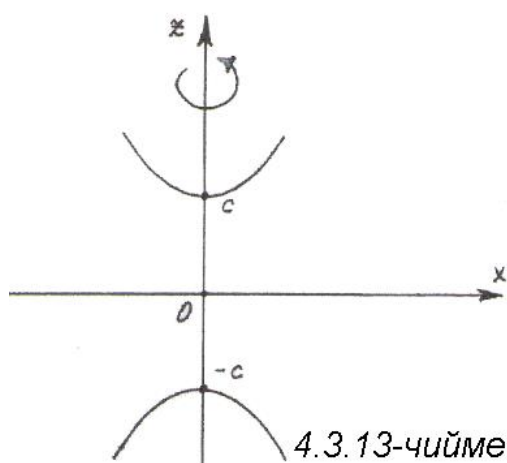
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (21)$$



эллипсоиддин каноникалык теңдемесине ээ болобуз.  $a = b = c$  болгон учурда  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  теңдемеси менен берилген, борбору  $O(o;o;o)$ , радиусу  $R = a$  болгон шар (сфера) келип чыгып, бул сфераны  $Oz$  огун бойлото  $k = \frac{c}{a} \leq 1$  коэффиценти боюнча бир калыпта кысуу менен эллипсоид алынат деп түшүнөбүз.

(21) теңдемесин  $z$  ке карата чечип, эллипсоиддин  $z = \pm c \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}$  функция көрүнүштөгү теңдемесин алабыз. «+»

белгиси алынса, эллипсоиддин  $Oxy$  координаттык тегиздигин үстүңкү бетиндеги бөлүгүн, ал эми «-» белгиси эллипсоиддин  $Oxy$  координаттык тегиздигин төмөнкү бетиндеги бөлүгүн сүрөттөгөн теңдемелер болушат. Эллипсоиддин тегиздиктер менен кесилишүү сызыгы мейкиндиктеги эллипстерди түзүшөт.



## II. Кош беттүү гиперболоид.

$Oxyz$  тик бурчтуу декарттык координаталар системасынын  $Oxz$  координаттык тегиздигинде  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$  түйүндөш гипербола берилсин (4.3.13-чийме). Аны  $Oz$  огун айланасында толук айлантуу менен

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ же}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (22)$$

теңдемеси менен берилген, айлануудан пайда болгон бетти алабыз. Бул бетти кош беттүү гиперболоид деп айтабыз (4.3.14-чийме).

Гиперболоид бири-биринен обочо,  $Oxy$  координаттык тегиздигин эки жагында өз ара симметриялуу жайгашкан эки ар башка беттен турат. (22) теңдемени  $z$  ке карата чыгарсак, анда гиперболоиддин  $Oxy$  тегиздигин

жогору жагындагы бөлүгү  $z = c \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ ,

төмөн жагындагы бөлүгү

$$z = -c\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{функциялары менен}$$

жазылышат.

Эгерде (22) гиперболоидин  $Oy$  огун

бойлото  $\kappa = \frac{b}{a} \leq 1$  коэффициентини боюнча

бир калыпта кыссак, же  $y$  ти  $\frac{a}{b}y$

өзгөрүлмөсү менен алмаштырсак, анда

жалпы көрүнүштөгү кош беттүү гиперболоиддин

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (22^A)$$

каноникалык теңдемесине ээ болобуз.

### III. Бир беттүү гиперболоид.

$Oxz$  координаталар системасын  $Oxz$

координаттык тегиздигиндеги  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

гиперболасын  $Oz$  огун айланасында толук

айлантуу менен (4.3.15-чийме),

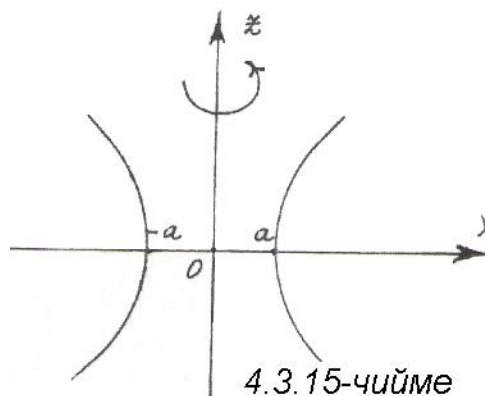
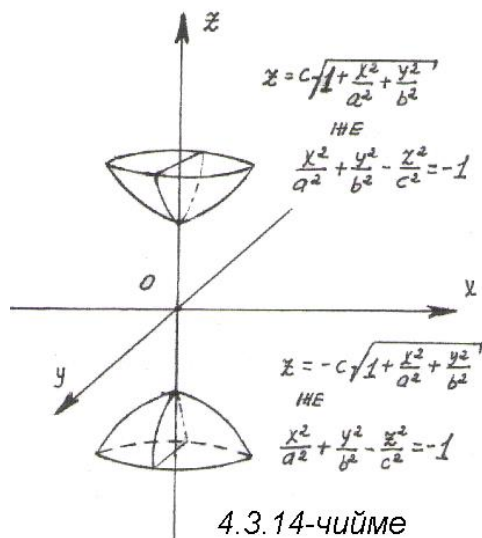
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  же  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  бир беттүү гиперболоид деп аталуучу

айлануудан пайда болгон беттин теңдемесин алабыз). Бул бетти  $Oy$  огун

бойлото  $\kappa = \frac{b}{a} \leq 1$  коэффициентини боюнча бир калыпта кысуу менен,

жалпы көрүнүштөгү бир беттүү гиперболоиддин каноникалык теңдемесине

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (23)$$



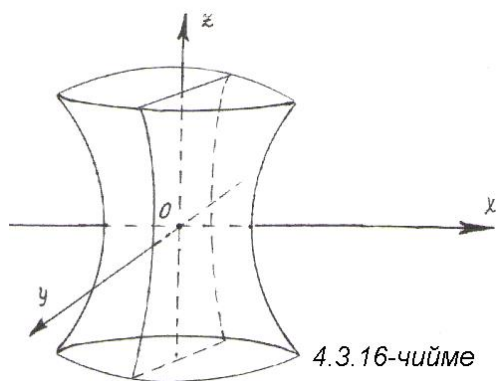
ээ болобуз (4.3.16-чийме. Бир беттүү гиперболоиддин  $Ox$  тегиздигинен

төмөн жактагы бөлүгүн  $z = -c \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1}$ , жогору жактагы бөлүгүн

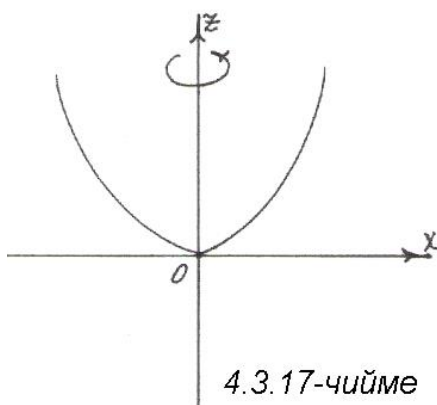
$$z = c \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1} \text{ айкын}$$

функция көрүнүштөрүндө да сүрөттөөгө болот.

#### IV. Эллиптикалык параболоид.



сызып (4.3.18-чийме), ал бет  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - z = 0$  теңдемеси менен сүрөттөлөт.

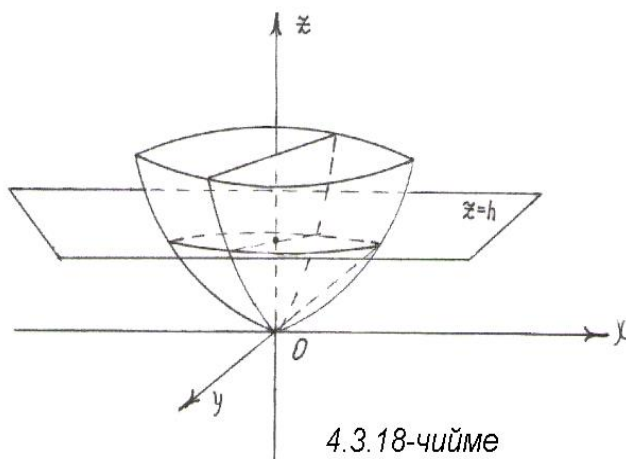


Эллиптикалык параболоидди  $Oy$  огун бойлото  $k = \frac{b}{a} \leq 1$  коэффициенти боюнча бир калыпта кыскак, же  $y$  ти  $\frac{a}{b}y$  өзгөрүлмөсү менен алмаштырсак,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0 \text{ же } z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (24)$$

жалпы көрүнүштөгү эллиптикалык параболоиддин каноникалык теңдемесине ээ болобуз.

Бул беттин эллиптикалык параболоид деп аталуусунун себеби, аны каалагандай  $z = h$  тегиздиги менен кесилишүү сызыгы эллипти түзгөндүгүндө. Ал эллипстин теңдемеси



$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0, \\ z = h \end{cases}$$

же

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2} = 1, \\ z = h \end{cases}$$

теңдемелер системалары менен берилет.

### 4.3.5 Гипербоалык параболоид

Каноникалык теңдемелери табылган он жети – экинчи тартиптеги беттердин арасында бешинчи орунда жазылган

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0 \quad (25)$$

теңдеме, гипербоалык параболоиддин каноникалык теңдемеси деп аталат. Бул бет конустук, цилиндрдик, айлануудан пайда болгон беттерге караганда татаалыраак түзүлүштө болот. Ошондуктан анын түзүлүү структурасына мүнөздөмө берүү үчүн, беттин  $z = \pm h$ ,  $x = \pm h$ ,  $y = \pm h$ , ( $h > 0$ ) тегиздиктери менен кесилүү сызыктарын изилдейбиз.

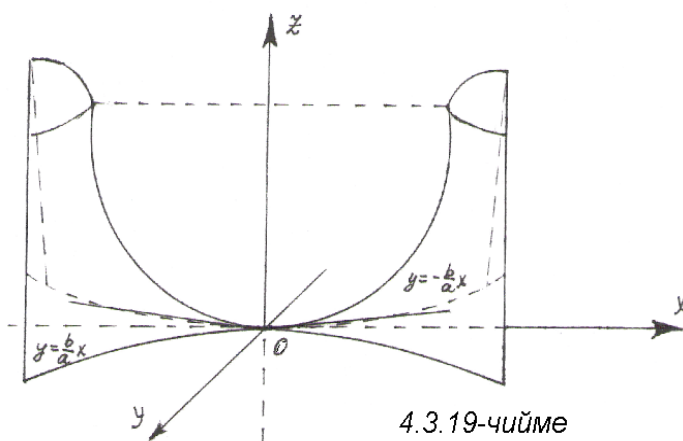
а)  $z = h$  тегиздиги менен кесүүдө

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - h = 0, \\ z = h \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2} = 1, \\ z = h \end{cases} \quad (26)$$

теңдемелер системалары менен берилген гипербола сызыктары келип чыгат.

$z = -h$  тегиздиги менен кесүүдө,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2} = 1, \\ z = -h \end{cases} \quad (27)$$



теңдемеси менен  $Oxy$  координаттык тегиздигин төмөн жагында жайгашкан гиперболаны сызыктары пайда болот.  $z = 0$  болгондо  $Oxy$  координаттык тегиздигинде

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad (28)$$

түздөрүн алабыз.

б)  $x = \pm h$  жана  $y = \pm h$  тегиздиктери менен кескенде,  $h$  тын белгисине карап,

$$\begin{cases} z = \frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \\ x = \pm h \end{cases} \quad \text{жана} \quad \begin{cases} z = -\frac{h^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}, \\ y = \pm h \end{cases} \quad (29)$$

параболаларына ээ болобуз.

Аныкталган (26) - (29) кесилүү сызыктарына карап, гиперболалык параболоиддин 4.3.19 – чиймесин сызабыз.

## 6. Мисалдар жана көнүгүүлөр

1. Сферанын борборун жана радиусун тапкыла:

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 72$$

**Чыгаруу:** ▷ Борбору  $M_0(2; -4; 1)$  чекити, радиусу  $R = \sqrt{72}$  болгон шардын бети же сфера болот. ◁

2.  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 43 = 0$  теңдемесин сферанын теңдемеси болорун көрсөткүлө.

**Чыгаруу:** ▷ Теңдеменин сол жагын өзгөртүп түзөлү  $x^2 - 2 \cdot 4x + 16 + y^2 + 2 \cdot 2y + 4 + z^2 + 2z + 1 - 64 = (x-4)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 64$ , анда берилген теңдеме  $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 8^2$  көрүнүшкө келип, борбору  $M_0(4; -2; -1)$ , радиусу  $R = 8$  болгон сферанын теңдемеси болот. ◁

3.  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  сферасын  $y = 2$  тегиздиги менен кескенде кандай ийри келип чыгат?

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген теңдемеге  $y = 2$  маанисин коюп

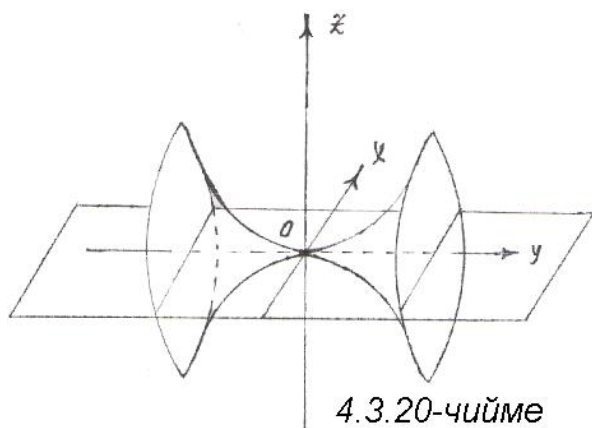
$$\begin{cases} x^2 + z^2 + 4 = 1, \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{z^2}{(\sqrt{3})^2} = -1, \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{жалган эллипс деп аталган бош}$$

көптүктү алабыз.  $\triangleleft$

4.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  эллипсин  $Oy$  огун айланасында айлантуудан пайда болгон бетти тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген эллипс  $Oxy$  координаттык тегиздигинде жайгашып,  $Oy$  огун айланасында толук айлануудан кийин

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \text{эллипсоид бетин сызат.} \triangleleft$$



5.  $y^2 = 6z$  ийрисин (параболасын)  $Oy$  огун айланасында айлантуудан келип чыккан бетти тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$   $Oyz$  тегиздигинде жайгашкан параболаны  $Oy$  огу боюнча толук айлантуудан  $y^2 = 6z + 6x$  теңдемеси менен

берилген бет келип чыгат. Чынында эле, бул беттин  $Oyz$  координаттык тегиздиги ( $x = 0$ ) менен

кесилиши  $y^2 = 6z$  параболасы,  $Oyz$  координаттык тегиздиги ( $z = 0$ ) менен кесилиши  $y^2 = 6x$  параболасы болуп, 4.3.20-чиймеде көрсөтүлгөн бетти табабыз.  $\triangleleft$

6.  $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 0$  теңдемеси менен берилген өз ара кесилишүүчү түздөрдү  $Oz$  огун айланасында айлантуудан келип чыккан бетти аныктагыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген теңдеме  $z^2 = \frac{16}{9}y^2$  же  $z = \pm \frac{4}{3}y$

түздөрүнөн турат (4.3.21-чийме). Аны  $Oz$  огун айланасында толук

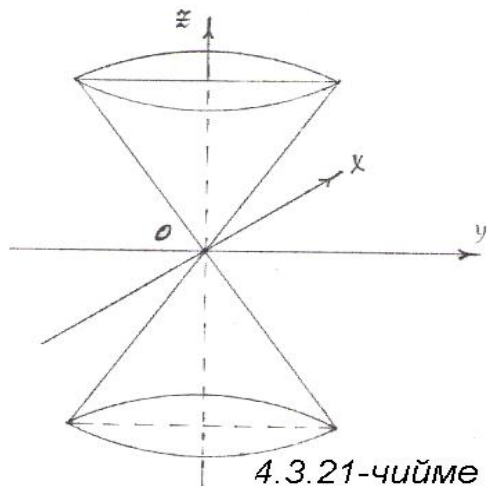


айлантуу менен,  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 0$  теңдемеси менен берилген конустук бетти алабыз. ◁

### Көнүгүүлөр

**4.8**  $x^2 + y^2 + 2y + z^2 + z - 1 = 0$  теңдемеси менен берилген бетти аныктагыла.

(Жообу: Сфера)



**4.9**  $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$  сферасын

а)  $y = 1$ ; б)  $y = \frac{1}{2}$ ; в)  $x = 0$ ; г)  $z = -1$

тегиздиктери менен кесилүү ийрилерин тапкыла.

**4.10**  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  гиперболасын  $Oz$  огу

боюнча толук айлантуудан келип чыккан бетти тапкыла.

**4.11** а)  $x^2 + y^2 = 25$ ;

б)  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ;

в)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ;

г)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ ; д)  $y^2 = 7x$  теңдемелери менен мейкиндикте берилген беттерди аныктагыла.

**4.12** Төмөндөгү теңдемелер менен кандай беттер сүрөттөлгөн:

а)  $14x = y^2 + z^2$ ; б)  $\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{15} - \frac{z^2}{10} = 1$

**4.13** Берилген беттерди аныктап, алардын берилген тегиздиктер менен кесилишин тапкыла:

а)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$  жана  $z + 2 = 0$ ;

б)  $x^2 + y^2 - 4z = 0$  жана  $x - 2 = 0$  тегиздиги.

## V ГЛАВА. МАТРИЦАЛАР, АНЫКТАГЫЧТАР ЖАНА АЛАРДЫН КОЛДОНУЛУШТАРЫ

### § 5.1 Аныктагычтарды түзүүдө орун алмаштыруулардын колдонулушу

$n$  элементтүү көптүктүн элементтерин кайталанбоочу тартип менен  $P_n = n!$  жолу орундарын алмаштырып жазууга болорун билебиз (1.1.2, 9 - бет). Мындай орун алмаштырууда көптүктүн элементтери жана алардын саны сакталып калганы менен, алардын жазылуу тартиптери же жайгашуу орундары (позициялары)  $n!$  жолу өзгөрүлөт. Мисалы,  $A = \{1, 2, 3\}$  сандарынан турган үч элементтүү көптүктөгү алгачкы тартипти: «Өсүү тартибинде жазуу» - десек, анда анын элементтерин  $P_n = 3! = 6$  жолу орундарын алмаштырып жазуу учурунда, алгачкы жазылуу тартиби  $3! = 6$  жолу бузулат. Атап айтканда биринчи орун алмаштыруу деп  $\{2, 1, 3\}$  тартибиндеги жазууну айтсак, анда алгачкы тартип 1 жолу бузулган болот, анткени өсүү тартиби бир жолу бузулуп, 1 саны өзүнөн чоң 2 санынан кийин жазылып калган. Мындай тартип бузууну «сандардын транспозициясы» 1 ге барабар же «инверсиялардын» саны 1 деп айтабыз. Берилген көптүктү  $\{3, 1, 2\}$  экинчи жолу тартиптештирип жазууда алгачкы тартип 2 жолу бузулуп, инверсиялардын саны 2 болду, анткени 1, 2 деген эки сандар өздөрүнөн чоң 3 санынан кийин жазылган.  $\{3, 2, 1\}$ - үчүнчү жолку тартиптештирүүдө (орундарын алмаштырууда) жалпы инверсиялардын саны 3 кө барабар, анткени 1 саны эки жолу тартип бузуп өзүнөн чоң 3, 2 сандарынан кийин жазылса, 2 саны бир жолу тартип бузуп өзүнөн чоң 3 санынан кийин жазылган. Ошентип, ар бир орун алмаштырууну өз - өзүнчө тартиптер деп эсептесек, анда алгачкы тартиптештирүүдө инверсиялардын саны 0 (жуп сан), биринчи тартиптештирүүдө инверсиялардын саны 1 (так сан), экинчи тартиптештирүүдө инверсиялардын саны 2 (жуп сан), үчүнчү тартиптештирүүдө инверсиялардын саны 3 (так сан) болуп, калган тартиптештирүүлөрдөгү инверсияларды аныктаганда, жалпы  $3! = 6$  сандагы тартиптештирүүлөрдүн жарымы так инверсиялар, калган жарымы жуп инверсиялар болгонуна ишенебиз. Аны жалпылап,  $n$  элементтүү

көптүктүн элементтерин  $n!$  жолу орундарын алмаштырып жазуу учурунда жарымы  $\frac{n!}{2}$  санда так инверсиялар, калган тең жарымы  $\frac{n!}{2}$  сандагы жуп инверсиялар болот деп кабыл алабыз.

Эгерде  $A = \{1, 2, 3\}$  алгачкы тартипте жазылган көптүктүн  $i$ -чи тартипте жазылышын  $A_i = \{i_1, i_2, i_3\}$  көрүнүштө деп эсептесек, анда  $i_j$ -сандары 1, 2, 3 сандарын бирөөсү болот ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ). Экинчи жактан, бул алгачкы жана  $i$ -тартиптештирүүлөрүн  $A$  көптүгүн  $A_i$  көптүгүнө өз ара бир маанилүү чагылтуу деп түшүнсөк болот:

$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ i_1, & i_2, & i_3 \end{pmatrix}$ . Мындай чагылтууну ( $n = 3$  болгондогу) үч элементтүү  $A$

көптүгүнүн элементтерин 3- даражадагы ордуна коюулар деп айтабыз. Экинчи жолчону түзгөн  $A_i$  көптүгүн элементтерин  $3! = 6$  жолу тартиптештирип жазууга болуп, алардын бирөөсү алгачкы тартиптештирүү менен дал келет. Элементтери биринчи жолчодой ырааттуулукта жазылган мындай  $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$  дал келүүчүлүктү, «0» - даражадагы ордуна коюулар дейбиз.

Ордуна коюулардагы инверсияларды, биринчи жолчо менен экинчи жолчонун инверсияларын суммасына барабар деп кабыл алабыз. Ордуна коюулардын мындай тартиптерин эске алып, матрица, аныктагыч сыяктуу кеңири колдонулушка ээ болгон математикалык аппараттарды түзөбүз. Мисалы, индекстери  $\{1, 2, 3\}$  сандары менен белгиленип,

$$\{ a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33} \} \quad (1)$$

тартибинде жазылган 9 элементтүү сандык көптүк берилсин. Аларды

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  көрүнүштө жазып, үчүнчү тартиптеги аныктагычты

түзөбүз.

(1) көптүгүн элементтерин индекстери боюнча үч элементтүү  $\{1, 2, 3\}$  көптүгүн элементтерин ар кандай тартиптештирүүлөрүнөн турат деп ойлоп,  $3! = 6$  жолу тартиптештире алабыз. Мындай тартиптештирүүдө

$\frac{3!}{2} = \frac{6}{2} = 3$  жолу так сандагы инверсиялар,  $\frac{3!}{2} = 3$  жолу жуп сандагы инверсиялар болушат.

Түзүлгөн аныктагычтын элементтерин индекстеринин жазылуу тартиптерин чагылтуу эрежеси катарында кабыл алып:

$$1. \quad \begin{array}{l} a_{11}, a_{22}, a_{33} \\ 1\text{-индекстердин тартип жолчосу} \rightarrow (1, 2, 3) \leftarrow \text{инверсия } 0, \\ \text{Экинчи индекстердин тартип жолчосу} \rightarrow (1, 2, 3) \leftarrow \text{инверсиясы } 0. \end{array}$$

Жолчолордун инверсияларын суммасы  $0 + 0 = 0$  жуп сан болгондуктан,  $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$  көбөйтүндүсүн белгисин оң дейбиз.

2.

$$\begin{array}{l} a_{13}, a_{21}, a_{32} \\ \text{Биринчи индекстер} \rightarrow (1, 2, 3) \leftarrow \text{инверсиялардын саны } 0, \\ \text{Экинчи индекстер} \rightarrow (3, 1, 2) \leftarrow \text{инверсиялардын саны } 2. \end{array}$$

Демек, жолчолордун инверсияларын суммасы  $0 + 2 = 2$  жуп сан болуп,  $a_{13} a_{21} a_{32}$  көбөйтүндүсүн да оң белгиге ээ дейбиз.

$$3. \quad \begin{array}{l} a_{12}, a_{23}, a_{31} \\ (1, 2, 3) \leftarrow \text{инверсиялардын саны } 0, \\ (2, 3, 1) \leftarrow \text{инверсиялардын саны } 2 \end{array}$$

болуп, алардын суммасы  $0 + 2 = 2$  жуп сан, анда  $a_{12} a_{23} a_{31}$  көбөйтүндүсүн да белгисин оң деп эсептейбиз.

$$4. \quad \begin{array}{l} a_{13}, a_{22}, a_{31} \\ (1, 2, 3) \leftarrow \text{инверсиялардын саны } 0, \\ (3, 2, 1) \leftarrow \text{инверсиялардын саны } 3 \end{array}$$

болуп, алардын суммасы  $0 + 3 = 3$  так сан, анда  $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$  көбөйтүндүсүн терс белгиде деп алабыз.

$$5. \quad \begin{array}{l} a_{11}, a_{23}, a_{32} \\ (1, 2, 3) \\ (1, 3, 2) \end{array} \quad \text{инверсиялардын саны } 0 + 1 = 1 \text{ так сан,}$$

анда  $a_{11} a_{23} a_{32}$  көбөйтүндүсүн терс белгиде деп алабыз.

6.

$$a_{12}, a_{21}, a_{33} \\ \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix} \quad \text{инверсиялардын саны } 0+1=1 \text{ так сан,}$$

анда  $a_{12}a_{21}a_{33}$  көбөйтүндүсүн да терс белгиде деп түшүнөбүз.

Ошентип аныктагычтын ар бир жолчосунан жана мамычасынан бирден гана алынып түзүлгөн, үч элементтердин индекстерин 3 - даражадагы ордуна коюуларындагы инверсиялардын санына карап, аныктагычтын сандык маанисин эсептөө эрежесин киргизебиз.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{33}a_{21}. \quad (2)$$

Демек,  $3! = 6$  жолу тартиптештирүүлөрдүн тең жарымы так инверсияларга ээ болуп терс белгиде, ал эми тең жарымы жуп инверсияларга ээ болуп оң белгиде жазылып, 3 - тартиптеги аныктагычтын сандык мааниси катарында ар башка жолчолорунан жана ар башка мамычаларынан бирден алынып, кайра кайталанбаган үч элементтердин көбөйтүндүлөрүн (2) суммасын кабыл алабыз. Мындай сумма өз ара бир маанилүү чагылтуулар катарында эсептелген эки тартиптештирүүлөр аркылуу түзүлгөндүктөн, ар бир аныктагычка бир гана сандык маани туура келет.

Ошондой эле  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ,  $n$  элементтүү сандык көптүгүн индекстер катарында пайдаланып,

$$\{ a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \} \quad \text{сандарынан}$$

турган

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad n - \text{тартиптеги аныктагычын түзөбүз.}$$

Бул аныктагычтын сандык мааниси да, анын ар бир жолчосунан жана ар бир мамычасынан бирден алынган  $n$  сандагы кайра кайталанбаган элементтердин көбөйтүндүлөрүн  $\frac{n!}{2}$  сандагы оң

белгидеги,  $\frac{n!}{2}$  сандагы терс белгидеги кошулуучуларын суммасы болуп, бир маанилүү аныкталат.

## §5.2 Матрицалар жана алар менен болгон амалдар

### 5.2.1 Матрица түшүнүгү. Матрицаларды кошуу жана кемитүү

Берилген  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$  тартипте иреттелип жазылган сандарынан түзүлгөн

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3)$$

көрүнүштөгү таблица  $3 \times 3$  тартиптеги квадраттык матрица деп аталат.  $a_{ij}$  – сандары ( $i, j = 1, 2, 3$ ) матрицанын элементтери деп аталып,  $i$  – индекси элемент турган жолчону,  $j$  – индекси элемент турган мамычаны көрсөтөт. Жолчолорун саны менен мамычаларын саны барабар болгон матрицаны квадраттык матрица дейбиз. Ошентип,  $3$  – тартиптеги аныктагыч иреттелип жазылган  $9$  сандын катышуусу менен аныкталган  $\Delta$  чыныгы саны болсо, матрица жөн гана  $9$  сандын катышуусу менен түзүлгөн (3) таблицасы болот.

Турмушта кездешүүчү таблицалардын баарын матрица деп эсептөөгө болот. Мисалы,  $3$  тайпадан турган студенттердин өздөштүрүү көрсөткүчүн  $3 \times 4$  –тартиптеги матрица көрүнүшүндө (ар бир тайпада  $25$  студент бар )

“5” “4” “3” “2” - өздөштүрүү

$$\begin{array}{l} I - \text{тайпада} \\ II - \text{тайпада} \\ III - \text{тайпада} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 10 & 3 \\ 4 & 10 & 11 & 0 \\ 2 & 8 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$



Эгерде (5) матрицасы бир гана жолчо менен түзүлсө, бир жолчолуу  $1 \times n$  - тартиптеги, ал эми бир гана мамычадан турса  $m \times 1$  - тартиптеги, бир гана элементтен турса  $(a_{11})$  - биринчи тартиптеги матрица деп айтабыз.

Матрицалар сандардан түзүлгөн таблицалар болуп, чексиз көп сандардан, ар кандай тартиптеги чексиз көп матрицаларды түзүү мүмкүн экенин байкайбыз. Матрицаларды сандар сыяктуу саноо, ченөө иштеринде колдоно албасак да, чөйрөдөгү көп түспөлдүү процестерди математикалык тилде моделдештирип таанып үйрөнүүдө колдонуп келебиз. Ал үчүн матрицаларга кыймыл киргизип, матрицаларды жумшоочу амалдар аркылуу, матрицалар көптүгүнүн алгебрасын түзөбүз. *Ошентип, матрицаларга киргизилген кошуу жана санга көбөйтүү амалдарга карата, бардык  $m \times n$  - тартиптеги матрицалардын көптүгүн  $R_{m \times n}$  - сызыктуу мейкиндигин түзөт* деп эсептейбиз.

$R_{3 \times 3}$  мейкиндигинде тартиптери бирдей матрицаларды кошуу жана кемитүү эрежеси карайлы. Айталы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

матрицалары берилсин. Аларды кошуу же кемитүү деп тиешелүү элементтерин кошуу же кемитүү менен түзүлгөн матрицаны түшүнөбүз:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Матрицаларды кошуу, кемитүү амалдары төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот.

**1<sup>0</sup>.** Тартиптери бирдей болгон гана матрицаларды кошууга жана кемитүүгө болот.

**2<sup>0</sup>.**  $A \pm 0 = A$  болсо, анда  $0$  - «нөл» матрица деп аталып, жалаң нөл

элементтерден турган матрица  $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  көрүнүштө жазылат.



**3<sup>0</sup>.** Матрицаларды кошуу, кемитүү амалдары  $A \pm B = B \pm A$  коммутативдүүлүк,  $(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$  ассоциативдүүлүк касиеттерине ээ ( $C \in R_{3 \times 3}$  берилген матрица).

Бул касиеттердин тууралыгы матрицаларды кошуу, кемитүүнүн (6) эрежесинен келип чыгат.

### 5.2.2 Матрицаларды санга көбөйтүү жана жолчолордун сызыктуу мейкиндиги

$R_{3 \times 3}$  мейкиндигинде берилген  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  матрицасын  $\lambda$

чыныгы санына көбөйтүү деп, анын бардык элементтерин  $\lambda$  санына көбөйтүп жазылган матрицаны түшүнөбүз:

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}.$$

$R_{m \times n}$  мейкиндигинде матрицаны санга көбөйтүү

$$A \cdot \lambda = \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ - & - & - & - \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \quad (7)$$

көрүнүштө ишке ашырылат.

Берилген  $m \times n$  – тартиптеги матрицанын жолчолорун ар бирин  $n$  элементтерден (компоненттерден) турган  $m$  сандагы жолчолордун көптүгү катарында, же ар бир жолчону  $R_{1 \times n}$  тартиптеги матрица катарында кароого болот. Бул учурда ар бир жолчону  $n$  координаталуу вектор сыяктуу элестетип,  $a$  жолчосун  $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ,  $b$  жолчосун  $b = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ ,  $c$  жолчосун  $c = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$  көрүнүштөрдө жазабыз, б.а. матрицаны  $n$  координаталуу  $m$  векторлордон түзүлгөн таблица деп эсептейбиз. Мында матрицанын  $a_{ij}$  элементтери ыңгайлуулук үчүн  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  деп белгиленип жазылды ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ ).

Жолчолордун мындай көптүгүнө кошуу жана санга көбөйтүү амалдарын  $1 \times n$ - тартиптеги матрицалар сыяктуу киргизип:

$$a, b \in R_{1 \times n} \Rightarrow a + b = \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n\}, \quad (8)$$

$$a \in R_{1 \times n} \Rightarrow \lambda a = \{\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n\} \quad (9)$$

жолчолордун көптүгүндөгү амалдарына ээ болобуз.

Жолчолордун көптүгүндө (8), (9) эрежелери менен аныкталган жолчолорду кошуу жана санга көбөйтүү амалдары:

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| 1) Кошууда                          | 2) Санга көбөйтүүдө                       |
| $a + b = b + a;$                    | $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b;$ |
| $(a + b) + c = a + (b + c);$        | $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a;$   |
| $a + 0 = 0 + a = a, 0$ – нөл жолчо; | $\lambda(\mu a) = (\lambda \cdot \mu)a;$  |
| $a + x = 0$ , чечими жашайт;        | $1 \cdot a = a$                           |

касиеттерине ээ болорун текшерип көрүүгө болот.

Ошентип матрицалардын жолчолорун көптүгү, (8), (9) амалдарына карата сызыктуулуктун 1) - 2) талаптарын канааттандырып, сызыктуу мейкиндикти түзөт (Матрицалардын  $R_{3 \times 3}$  мейкиндигин да сызыктуулуктун 1) – 2) касиеттерине баш ийери, аларды кошуу жана санга көбөйтүү эрежелеринен келип чыгат).

Жолчолордун мейкиндигин  $n$  координаталуу векторлордун сызыктуу мейкиндиги катарында эсептеп, сызыктуу көз каранды эмес жана сызыктуу көз каранды жолчолор түшүнүгүн киргизебиз. Айталы  $a_1, a_2, \dots, a_n$  деп  $m \times n$  тартиптеги  $A$  матрицасын жолчолорун белгилейли

$$A = \begin{matrix} a_1 - \text{жолчо} \rightarrow \\ a_2 - \text{жолчо} \rightarrow \\ \text{-----} \\ a_m - \text{жолчо} \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \text{ Ал эми } b \text{ деп ушул эле матрицанын}$$

же башка бир матрицанын каалагандай бир  $n$  компоненттүү жолчосун алабы.

Эгерде  $b$  жолчосун  $a_1, a_2, \dots, a_m$  жолчолору аркылуу

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m \quad (10)$$

көрүнүшүндө туюнтуу мүмкүн болсо, анда  $b$  жолчосун  $a_1, a_2, \dots, a_m$  жолчолорун  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  коэффициенттүү сызыктуу комбинацияларынан турат деп айтабыз ( $\forall i: \lambda_i \in R, i = 1, 2, \dots, m$ ).

(10) сызыктуу комбинацияда жок дегенде бир  $\lambda_i \neq 0$  болсо, анда аны тривиалдык эмес сызыктуу комбинация, ал эми  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$  болсо, тривиалдык сызыктуу комбинация дейбиз. Тривиалдык учурда  $b$  жолчосу жалаң нөлдөрдөн гана куралган болот. Мындай  $b$  жолчосу жалаң нөлдөрдөн куралган абал, тривиалдык учурда гана ( $\forall i: \lambda_i \equiv 0$ ) аткарылса, анда  $a_1, a_2, \dots, a_m$  жолчолорун сызыктуу көз каранды эмес системаны түзөт дейбиз. Эгерде  $\exists i: \lambda_i \neq 0$  болсо деле  $b$  жолчосу жалаң нөлдөрдөн турган абал түзүлсө, анда  $a_1, a_2, \dots, a_m$  жолчолорун сызыктуу көз каранды система дейбиз. Көз каранды системанын каалагандай  $a_i$  жолчолорун бирөөсүн калгандарын сызыктуу комбинациясы катарында туюнтууга болот.

Чынында эле  $a_1, a_2, \dots, a_m$  жолчолору сызыктуу көз каранды болсо, анда ага жараша  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  сандары табылып,

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0 \quad (11)$$

шарты кайсы бир  $\lambda_i \neq 0$  болсо деле аткарыла берет. Аныктык үчүн  $\lambda_m \neq 0$  десек, анда (11) ден

$$a_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} a_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} a_{m-1} \text{ туюнтуусу келип чыгат. } \mu_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_m},$$

$i = 1, 2, \dots, m-1$  белгилөөлөрүн жардамы менен аны

$$a_m = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_{m-1} a_{m-1} \quad (12)$$

көрүнүшкө келтирсек,  $a_m$  жолчосу калган жолчолордун сызыктуу комбинациясы менен туюнтулган болот. Ошондой эле, тескерисинче жолчолордун бирөөсү калгандары менен сызыктуу туюнтулса, анда ал жолчолордун системасын сызыктуу көз каранды болот деп эсептейбиз. Мисалы,  $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$  жолчолорун тривиалдык эмес сызыктуу комбинациясы катарында (12) барабардыгын

$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_{m-1} a_{m-1} + (-1) a_m = 0$  көрүнүштө жазсак, анда  $\lambda_m = -1 \neq 0$  болсо деле, бул сызыктуу комбинация нөлгө тең болгонун көрөбүз.

**Эскертүү:**  $R_{m \times n}$  мейкиндигинде берилген матрицалардын ар бир мамычасын  $t$  компоненттерден турган бир элемент деп эсептеп, матрицаларды саны  $n$  ге барабар мамычалардын көптүгү катарында кароого болот. Мамычалардын көптүгүндө кошуу, санга көбөйтүү амалдарын  $R_{m \times 1}$  мейкиндигиндеги бир мамычалуу матрицаларды кошуу, санга көбөйтүү амалдары сыяктуу аныктап, матрицанын мамычаларын көптүгүн ошол амалдарга карата сызыктуу мейкиндик деп эсептөөгө болот.

### 5. 2. 3 Матрицаларды көбөйтүү

Жогоруда кошуу жана санга көбөйтүү амалдарына карата, матрицалардын  $R_{m \times n}$  сызыктуу мейкиндиги болгон көптүктүн практикалык колдонулушун кеңейтүү максатында, кошумча дагы бир көбөйтүү амалын киргизебиз.

Берилген үчүнчү тартиптеги  $A$  жана  $B$  матрицаларын көбөйтүндүсү деп, элементтери төмөндөгүдөй тартипте аныкталган  $C$  матрицасын түшүнөбүз:

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = C \quad (13)
 \end{aligned}$$

Демек,  $C$  матрицасын  $c_{ij}$  элементи ( $i, j = 1, 2, 3$ )

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} = \sum_{k=1}^3 a_{ik}b_{kj} \quad (14)$$

көрүнүштө эсептелет.  $n$  - тартиптеги квадраттык матрицалар үчүн (14) формуласы

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (14^A)$$

көрүнүштө жазылат. Ошентип С матрицасын  $c_{ij}$  – элементи А матрицасын  $i$  – жолчосун элементтерин, В матрицасын  $j$  – мамычасын тиешелүү элементтерине түгөйлөш көбөйтүп, суммалоо менен табылат:

$$\left( \begin{array}{c} i - \text{жолчо} \\ \hline A \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} j - \text{мамыча} \\ \hline B \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} i - \text{жолчо} \\ \hline C \\ \hline j - \text{мамыча} \end{array} \right) \cdot c_{ij}$$

Матрицалардын көбөйтүүнүн (13) – (14<sup>A</sup>) эрежелери, каалагандай эле тартиптеги матрицаларды көбөйтө берүүгө ылайыкташкан эместигин байкайбыз, б.а. А матрицасында канча мамыча болсо, В матрицасында ошончо жолчо болууга тийиш. Ушундай шартта гана элементтерин бири – бирине түгөйлөш көбөйтүп, суммалоо мүмкүнчүлүгү түзүлөт.

$$\left( \begin{array}{c} \text{Тартиби} \\ m \times n \\ \hline A \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} \text{Тартиби} \\ n \times p \\ \hline B \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Тартиби} \\ m \times p \\ \hline C \end{array} \right) \quad (15)$$

Бул көбөйтүү эрежесинде В матрицасын мамычаларынын  $p$  санына чек коюлбайт. Мисалы,  $3 \times 3$  тартиптүү А матрицасына,  $3 \times 2$  тартиптүү В матрицасын көбөйтүүгө болот:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Бирок, тескерисинче  $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  көбөйтүүсү аткарылбайт,

анткени биринчи көбөйтүүчү В матрицасында 2 мамыча, ал эми экинчи көбөйтүүчү А матрицасында 3 жолчо болуп, аларды түгөйлөштүрүп көбөйтүү мүмкүн эмес.

### Матрицалардын көбөйтүүнүн айрым касиеттери

**1<sup>0</sup>.** Жалпы учурда матрицаларды көбөйтүү коммутативдүүлүк касиетине ээ эмес:  $A \cdot B \neq B \cdot A$ . Бирок, айрым бир тандалган матрицалар үчүн коммутативдүүлүк касиети аткарылат.

**2<sup>0</sup>** Эгерде  $A \cdot E = E \cdot A = A$  ( $A, E \in R_{3 \times 3}$ ) болсо, анда E бирдик матрица деп аталып,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 көрүнүштө жазылат. Бирдик матрицанын башкы диагоналында жалаң гана 1 сандары болуп, калган элементтерин баары нөлдөр болушат.

**3<sup>0</sup>** Бирдей тартиптеги A, B, C матрицалары берилсе, анда

- а)  $(A \cdot B)C = A \cdot (B \cdot C)$ ;
- б)  $A(B + C) = AB + AC$ ;
- в)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \quad \alpha, \beta \in R$ ;
- г)  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ ;
- д)  $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$  орун алат.

**4<sup>0</sup>**  $A \times A^{-1} = E$  болсо, анда  $A^{-1}$  матрицасы A матрицасына тескери матрица деп аталат.

## §5.3 Матрицаларды өзгөртүп түзүү

### 5.3.1 Матрицаларды транспонирлөө

$A \in R_{3 \times 3}$  болгон  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  матрицасы берилсин. Бул

матрицанын бардык жолчолорун, ошол эле номердеги мамычалары менен орундарын которуштургандан кийин (б.а.1 - жолчону 1- мамыча менен, 2 - жолчону 2 - мамыча менен ж.б.у.с) түзүлгөн матрица, берилген матрицага карата *транспонирленген матрица* деп аталып,  $A^T$  деп белгиленет:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Транспонирлөө учурунда квадраттык матрицанын башкы диагоналындагы элементтер өзгөрүүсүз каларын көрөбүз.

Эгерде матрицаларды транспонирлөө учурунда төмөндөгүдөй абалдар орун алса:

- 1)  $B = B^T$  болсо, анда  $B$  матрицасын симметриялуу матрица;
- 2)  $C^T = -C$  болсо, анда  $C$  матрицасын кыйгач симметриялуу матрица деп атайбыз.

Каалагандай эле  $A$  матрицасын, аны менен бирдей тартиптеги кандайдыр бир симметриялуу  $B$  матрицасы менен кыйгач симметриялуу  $C$  матрицасын суммасы катарында ажыратып жазууга болот. Мындай ажыратуу  $A=B + C$  бирөө гана болот. Мисалы,  $R_{2 \times 2}$  мейкиндигинен алынган экинчи тартиптеги  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  матрицасын симметриялуу  $B$ ,

кыйгач симметриялуу  $C$  матрицаларын суммасы катарында жазалы:

$$B = \begin{pmatrix} x & a \\ a & y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ көрүнүштө десек, } B^T = B, \quad C^T = -C \text{ шарттары}$$

аткарылууда, андай болсо,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & a \\ a & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ барабардыгы аткарылышы үчүн:}$$

$$\begin{cases} x+0 = -1, \\ y+0 = 2, \\ a-b = 0, \\ a+b = 3 \end{cases} \text{ теңдиги орун алышы керек. Демек, } x = -1, \quad y = 2,$$

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{3}{2} \text{ болсо, берилген матрица}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} = B + C \text{ симметриялуу жана кыйгач}$$

симметриялуу матрицалардын суммасына бир маанилүү ажырайт. Жалпы  $m \times n$ - тартиптеги матрицалар үчүн транспонирлөө

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ - & - & - & - \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

көрүнүштө

жүргүзүлүп,  $n \times m$  - тартиптеги матрица келип чыгат. Аны схемада

$$\begin{pmatrix} m \times n \\ A \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} n \times m \\ A^T \end{pmatrix} \text{ көрсөтөбүз.}$$

Ошентип транспонирлөө кезинде жолчолордун саны мамычалардын санына, мамычалардын саны жолчолордун санына айланат, б.а.  $A$  матрицасы  $m$  жолчолуу  $n$  мамычалуу болсо,  $A^T$  матрицасы  $n$  жолчолуу  $m$  мамычалуу болот. Мисалы, эки жолчолуу, төрт мамычалуу  $A$  матрицасын транспонирлөө менен

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

төрт жолчолуу, эки мамычалуу  $A^T$  матрицасына ээ болобуз.

Матрицаларды транспонирлөө эрежеси төмөндөгүдөй

- 1<sup>0</sup>.  $(A^T)^T = A$ ;
- 2<sup>0</sup>.  $(A+B)^T = A^T + B^T$ ;
- 3<sup>0</sup>.  $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$ ;
- 4<sup>0</sup>.  $(AB)^T = B^T A^T$  касиеттерге ээ болорун текшерип көрүүгө болот.

**Эскертүү:** Матрицаларды транспонирлөөдө алардын сызыктуу көз каранды эмес жолчолорун (мамычаларын) саны өзгөрбөйт.

### 5.3.2 Матрицаларды элементардык өзгөртүү.

$R_{m \times n}$  мейкиндигинде  $m \times n$ - тартибиндеги эки  $A$  жана  $\tilde{A}$  матрицаларын алалы.  $A$  матрицасын жолчолорун (мамычаларын) элементардык өзгөртүүлөр менен  $\tilde{A}$  матрицасына окшош өзгөртүү деп, төмөндөгү үч өзгөртүүлөрдүн натыйжасында түзүлгөн  $\tilde{A}$  матрицасын айтабыз:



**I. А матрицасынын каалагандай эки жолчосун (мамычасын) орундарын бири – бири менен алмаштырып,  $\tilde{A}$  матрицасын түзүүнү;**

**II. А матрицасын каалагандай бир жолчосуна (мамычасына) нөлдөн айырмалуу  $\beta$  санын көбөйтүп жазуу менен  $\tilde{A}$  матрицасын түзүүнү;**

**III. А матрицасын бир жолчосуна (мамычасына) экинчи бир жолчосун (мамычасын)  $\gamma$  санына көбөйтүп, кошуу менен  $\tilde{A}$  матрицасын түзүүнү.**

Мындай өзгөртүүдө А матрицасы окшош  $\tilde{A}$  матрицасына айланып, окшоштук байланыш  $A \sim \tilde{A}$  көрүнүштө белгиленет. Өз учурунда  $\tilde{A}$  матрицасын элементардык өзгөртүү менен кайра А матрицасына калыбына келтирүү мүмкүн, б.а.  $\tilde{A} \sim A$ .

I, II, III өзгөртүүлөрүндө матрицанын сызыктуу көз каранды эмес жолчолорун (мамычаларын) сызыктуу көз каранды эместиги сакталат. Матрицаларды элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзүүнүн негизги максаты, А матрицасына окшош, бирок жолчолорундагы нөл болгон элементтери тепкичтүү абалда жайгашкан  $\tilde{A}$  матрицасын түзүү болот. Бул процесстин жүрүү схемасын  $3 \times 5$  - тартиптеги матрицанын мисалында түшүндүрүп көрөлү. Берилген матрицаны тепкичтүү абалдагы окшош матрицага элементардык өзгөртүү, анын жолчолорун, мамычаларын элементтерин нөлгө айлантуу максатын көздөйт. Ошондуктан тепкичтүү абалга келтирүүнү

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} \quad (17)$$

бир нече кадамдарга бөлөбүз.

**1 - Кадам:**  $a_{11} \neq 0$  болсун дейли. Эгерде  $a_{11} = 0$  болсо, анда  $a_{21}$  же  $a_{31}$  нөлдөн айырмалуу болушу мүмкүн. Биринчи жолчону алар турган жолчо менен алмаштырып,  $\tilde{a}_{11} \neq 0$  абалын түзөбүз, б.а. биринчи жолчонун биринчи элементи нөлдөн айырмалуу болгондой жолчолорду же мамычаларды (I - өзгөртүү) алмаштырып өзгөртөбүз.

Биринчи жолчону  $a_{11}$  санына бөлүп жиберип же  $\frac{1}{a_{11}}$  санына көбөйтүп (II- өзгөртүүнүн негизинде), аны

$$A_1 = \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} & \tilde{a}_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} \text{ көрүнүшкө келтиребиз.}$$

$$\left( \tilde{a}_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad j = 2, 3, 4, 5 \right)$$

$A_1$  матрицасын биринчи жолчосун өзүндөй калтырып, экинчи жолчого « $-a_{11}$ » санына көбөйтүлгөн биринчи жолчону кошуп, ал эми үчүнчү жолчого « $-a_{31}$ » санына көбөйтүлгөн биринчи жолчону кошуп жазып,

$$A_2 = \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} & \tilde{a}_{15} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} & \tilde{a}_{25} \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} & \tilde{a}_{35} \end{pmatrix} \text{ матрицасын алабыз. Мында}$$

$$\tilde{a}_{2j} = a_{2j} - a_{21}\tilde{a}_{1j}, \quad \tilde{a}_{3j} = a_{3j} - a_{31}\tilde{a}_{1j}, \quad j = 2, 3, 4, 5.$$

**2 - Кадам:**  $A_2$  матрицасын 1- жолчосу өзүндөй калып,  $\tilde{a}_{22} \neq 0$  болсун ( $\tilde{a}_{22} = 0$  болсо, анда жолчолорду же мамычаларды алмаштырып бул абалдагы элементти нөл эмес көрүнүшкө келтиребиз).

$A_2$  матрицасын экинчи жолчосун  $\tilde{a}_{22}$  ге бөлүп жиберип же  $\frac{1}{\tilde{a}_{22}}$

$$\text{санына көбөйтүп, } A_3 = \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} & \tilde{a}_{15} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \tilde{a}_{34} & \tilde{a}_{35} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_{2j} = \frac{\tilde{a}_{2j}}{\tilde{a}_{22}} \quad \left( j = 3, 4, 5 \right) \text{ матрицасын алабыз. } A_3 \text{ матрицасын биринчи}$$

жана экинчи жолчолорун өзүндөй калтырып, үчүнчү жолчосуна « $-\tilde{a}_{32}$ » кө көбөйтүлгөн экинчи жолчону кошуп жазабыз. Натыйжада

$$A_4 = \tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} & \tilde{a}_{15} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$\alpha_{3j} = \tilde{a}_{3j} - \tilde{a}_{32}\alpha_{2j}$  ( $i = 3,4,5$ ) жолчолорундагы нөл элементтери тепкич абалын элестеткен матрицага ээ болобуз.

Ошентип (17) матрицасына окшош (18) тепкичтүү абалдагы матрицаны түздүк, ал процесс I, II, III өзгөртүүлөрү аркылуу  $A \sim A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4$  кадамдары менен жүргүзүлдү.

Мындай окшош өзгөртүүлөрдүн 1- кадамында эле айрым жолчолордун көпчүлүк же бардык элементтери толугу менен нөлгө айланып калса, матрицаны тепкич абалына келтирүү кийинки кадамдарсыз эле бүтүп калышы мүмкүн.

Жолчолорду (мамычаларды) I, II, III элементардык өзгөртүүлөр менен нөл сандарынан турган жолчолорго (мамычаларга) айлантуу процесси жолчолордун (мамычалардын) сызыктуу көз каранды эмес системаларды түзүүсүнө байланышкан болот, б.а. бири – бири менен сызыктуу көз каранды болгон жолчолор (мамычалар) жоюшуп, толук нөл элементтерден турган жолчолорго айланышат.

Жалпы учурда  $m \times n$  – тартиптеги ( $m < n$ ) матрицаны тепкичтүү абалга келтирүүдө  $m-1$  чейинки кадамдар болуп, анын натыйжасында

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \dots & \alpha_{1m} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} \dots & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 \dots & \alpha_{mm} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{берилген}$$

матрицаны өзүнө окшош тепкичтүү матрицага өзгөртө алабыз.

Мисалы:  $\triangleright \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$   $4 \times 3$  - тартибиндеги матрицаны тепкичтүү

матрицага өзгөртүп түзөлү. Анын биринчи жана үчүнчү жолчолорун

алмаштырып жазабыз  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Андан кийин биринчи жолчосун

өзүндөй калтырып, экинчи жолчосуна «-2» ге көбөйтүлгөн биринчи жолчону кошуп, үчүнчү жолчого биринчи жолчону кошуп, төртүнчү жолчого 3 кө көбөйтүлгөн биринчи жолчону кошуп жазып,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$
 матрицасына ээ болобуз. Кийинки кадамда биринчи, экинчи

жолчолорду өзүндөй калтырып, үчүнчү жолчону «-1» ге көбөйтүлгөн экинчи жолчону кошуу менен, төртүнчү жолчону 2 ге көбөйтүлгөн экинчи жолчону кошуу менен

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$
 матрицасын алабыз. Бул матрицанын үчүнчү жолчосу калган

жолчолордун сызыктуу тривиалдык эмес комбинациясы катарында туюнтулуп, б.а. сызыктуу көз каранды системаны түзүп, бардык элементтери нөлдөр болот. Акырында 3 - жолчо менен 4 - жолчолордун орундарын алмаштырып,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 тепкичтүү формага өзгөртүлгөн матрицаны табабыз. ◀

Жогоруда айтылгандардын жыйынтыгын теорема катарында корутундулайбыз:

**5.1 - Теорема.** *Каалагандай матрицанын жолчолорун (мамачаларын) I, II, III – түрүндөгү элементардык өзгөртүүлөрүн пайдаланып, тепкичтүү матрицага өзгөртүп түзүүгө болот.*

### Эскертүү:

Квадраттык матрицаларда элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзүү үчүн, өзгөртүүлөрдүн матрицалары деп аталган квадраттык матрицаларды колдонууга да болот. Өзгөртүүлөрдүн матрицаларын үч түрү бар:

**1-түрү.** E бирдик матрицасын каалагандай  $i$  - жана  $k$  - жолчолорун алмаштыруу менен түзүлгөн  $P_{ik}$  - матрицасы.

Мисалы, 3-тартиптеги E бирдик матрицада 3 – жолчо менен 2 – жолчосун алмаштыруу  $P_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  көрүнүштө болот.

**2- түрү.** Е бирдик матрицасын диагоналында турган 1 элементтерин бирөөсүн ( $i$  - жолчо,  $i$  - мамычанын кесилишинде) нөлдөн айырмалуу  $\beta$  саны менен алмаштыруу менен түзүлгөн  $D_i$  матрицасы.

Мисалы, 4-тартиптеги квадраттык матрицада  $D_2$  матрицасы

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 2\text{-жолчо}$$

↓

2-мамыча

көрүнүштө болот.

**3-түрү.** Е бирдик матрицасын диагоналындагы «1» элементтеринен башка,  $i$ -жолчо менен  $j$ -мамычада турган бир нөл эмес  $\gamma$  элементи менен айырмаланган  $L_{ij}$  матрицасы көрүнүштө болот. Мисалы,

$$L_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ көрүнүштө жазылат.}$$

А квадраттык матрицасын элементардык өзгөртүп түзүү үчүн, аны  $P_{ik}, D_i, L_{ij}$  матрицаларына зарылдыкка жараша көбөйтүшөт. Натыйжада I, II, III өзгөртүүлөрү ишке ашып, А матрицасына окшош  $\tilde{A}$  матрицасы келип чыгат. Аларды А матрицасына сол жагынан көбөйткөндө жолчолордо, оң жагынан көбөйткөндө мамычаларда элементардык өзгөртүүлөр ишке ашат.

## 7. Мисалдар

### 1. Матрицаларды көбөйткүлө.

**Чыгаруу:**

$$a) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 5 \end{pmatrix} .;$$

б)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  матрицаларын көбөйтүү коммутативдүү болобу?

**Чыгаруу:**

$$\triangleright A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 & (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = C;$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = D. \quad C \neq D$$

болгондуктан, коммутативдүүлүк орун албайт.  $\triangleleft$

2. а)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  матрицалары берилсе,  $A+2B$

матрицасын тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright A+2B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0+2 & 1-2 & 4+0 \\ -1+6 & 2+10 & 1+0 \\ 3+4 & 5+8 & 7+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 12 & 1 \\ 7 & 13 & 19 \end{pmatrix}. \triangleleft$$

б)  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  матрицасын  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  матрицасына көбөйткүлө.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Бул матрицаларды көбөйтө албайбыз, анткени  $A$  матрицасында  $n=3$  мамыча,  $B$  матрицасында  $m=2$  жолчо болуп, аларды түгөйлөш суммалоо мүмкүн эмес.  $\triangleleft$

3.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  матрицасын  $A^T$  матрицасына көбөйткүлө.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген матрицанын транспонирленген матрицасы

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ көрүнүштө болуп, } AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

матрицасын алабыз.  $\triangleleft$

4. Берилген  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  матрицасына көбөйткөндө

коммутативдүүлүк шарты аткарыла тургандай  $B$  матрицасын түзгүлө.

**Чыгаруу:**  $\triangleright AB = BA$  шарты аткарылсын деген талапты

канааттандыруучу  $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  элементтери белгисиз матрица болсун

дейли. Анда

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{теңдештиги аткарылууга тийиш.}$$

Барабардыктын эки жагындагы матрицаларды көбөйтүп,

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix} \quad \text{теңдештигинин тиешелүү}$$

элементтерин теңдештирсек,

$$\begin{cases} x+2z = x+3y, \\ 3x+4z = z+3t, \\ y+2t = 2x+4y, \\ 3y+4z = 2z+4t \end{cases} \quad \text{төрт белгисиздүү төрт теңдемелер системасы келип}$$

чыгат. Мындай  $x, y$  өзгөрүлмөлөрүн эркин тандаган кезде

$z = \frac{3}{2}y$ ,  $t = x + \frac{3}{2}y$  болсо гана, көбөйтүү коммутативдүү боло

тургандай  $B = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{3}{2}y & x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix}$  матрицасын түзүүгө боло тургандыгын

көрөбүз.  $\triangleleft$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & 9 & -13 & 7 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{матрицасын жолчолору сызыктуу көз каранды}$$

системаны түзөрүн көрсөтүп, анын бир жолчосун калгандарынын сызыктуу комбинациясы катарында туюнткула.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген матрицанын жолчолорун

$$a_1 = \{1, 9, -13, 7\}, \quad a_2 = \{2, -3, 4, 5\}, \quad a_3 = \{1, 2, -3, 4\}, \quad a_4 = \{3, 4, -5, 7\}$$

деп белгилеп, алардын  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  коэффициенттүү сызыктуу

комбинациясы нөл элементтерден турган  $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = 0$

$0 = \{0, 0, 0, 0\}$  жолчону түзөт дейли. Жолчолорду компоненттери боюнча кошуп,

$$\lambda_1 \cdot \{1, 9, -13, 7\} + \lambda_2 \cdot \{2, -3, 4, 5\} + \lambda_3 \cdot \{1, 2, -3, 4\} + \lambda_4 \cdot \{3, 4, -5, 7\} = \{0, 0, 0, 0\}$$

теңдештигине ээ болобуз. Аны компоненттери боюнча теңдештирип,

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2 + \lambda_3 \cdot 1 + \lambda_4 \cdot 3 = 0, \\ \lambda_1 \cdot 9 + \lambda_2 \cdot (-3) + \lambda_3 \cdot 2 + \lambda_4 \cdot 4 = 0, \\ \lambda_1 \cdot (-13) + \lambda_2 \cdot 4 + \lambda_3 \cdot (-3) + \lambda_4 \cdot (-5) = 0, \\ \lambda_1 \cdot 7 + \lambda_2 \cdot 5 + \lambda_3 \cdot 4 + \lambda_4 \cdot 7 = 0 \end{cases} \quad \text{теңдештиктерине ээ болобуз.}$$

Аны теңдеме катары коэффициенттерге карата чыгарып,  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 0$  көрүнүштөгү чечимдерди табабыз. Демек,  $a_1, a_2, a_3, a_4$  жолчолору сызыктуу көз каранды системаны түзүшөт, анткени

$$\lambda a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4 = 0 \quad \text{же} \quad 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 - 3 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 = 0 \quad \text{шарты}$$

тривиалдык эмес же  $\exists i : \lambda_i \neq 0$  болсо деле аткарылат. Мисалы:

$$\lambda_1 = 1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 1 \neq 0, \quad \lambda_3 = -3 \neq 0.$$

Жолчолордун сызыктуу көз каранды системаны түзөрүн көрдүк. Алардын бирөөсүн калгандарын сызыктуу комбинациясы катарында туюнталы. Мисалы, үчүнчү  $a_3$  жолчосун  $a_3 = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + 0 \cdot a_4$  көрүнүштө туюнтабыз. Бул туюнтууну жолчолордун компоненттери боюнча мамыча көрүнүшүндө жазып көрсөтөлү:

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 1 \\ \frac{1}{3} \cdot 9 \\ \frac{1}{3} \cdot (-13) \\ \frac{1}{3} \cdot 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 2 \\ \frac{1}{3} \cdot (-3) \\ \frac{1}{3} \cdot 4 \\ \frac{1}{3} \cdot 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot (-5) \\ 0 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \\ \frac{3-1}{3} \\ \frac{-13}{3} + \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} + \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = a_3. \triangleleft$$

$$a_3 \quad \frac{1}{3}a_1 \quad \frac{1}{3}a_2 \quad 0 \cdot a_4$$

$$6. \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 20 \\ -1 & 2 & -3 & -11 \end{pmatrix} \quad \text{матрицасын элементардык өзгөртүүлөрдүн}$$

жардамы менен тепкичтүү абалга келтиргиле.



**Чыгаруу:** ▷ Үчүнчү жолчо менен биринчи жолчону алмаштырып жазалы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & -2 & 11 \\ 2 & -2 & 1 & 12 \\ -1 & 2 & -3 & -11 \end{pmatrix}. \text{Биринчи, экинчи жолчону өзүндөй калтырып, үчүнчү}$$

жолчого «-2» ге көбөйтүлгөн биринчи жолчону, төртүнчү жолчого биринчи жолчону кошуп жазсак,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -28 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \text{ келип чыгат. 1, 2, 3 - жолчолорду өзүндөй калтырып,}$$

4 - жолчого «-1» ге көбөйтүлгөн экинчи жолчону кошуп жазалы. Анда, берилген матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ тепкичтүү абалга келет. } \triangleleft$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ матрицасын өзгөртүүлөрдүн}$$

$$P_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ матрицаларына}$$

көбөйтүп көргүлө. Көбөйтүүнүн натыйжасында A матрицасында кандай элементардык өзгөрүүлөр болгонун түшүндүргүлө.

**Чыгаруу:** ▷ 1) A матрицасына өзгөртүүлөрдүн  $P_{32}$ , матрицасын сол жагынан көбөйтүп көрөлү:

$$P_{32} \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ анда A матрицасын экинчи}$$

жолчосу менен үчүнчү жолчосу алмашып, I элементардык өзгөртүү аткарылган болот.  $D_2$  ни оң жагынан көбөйтөлү

$$A \times D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \beta & 4 \\ 0 & 2\beta & 1 \\ 1 & 2\beta & 0 \end{pmatrix}, \text{ экинчи мамыча } \beta \text{ санына}$$

көбөйтүлүп II элементардык өзгөртүү ишке ашырылды.

$L_{21}$  ди оң жагынан көбөйтөлү

$$A \times L_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+\gamma & 1 & 4 \\ 2\gamma & 2 & 1 \\ 1+2\gamma & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ анда биринчи мамычага } \gamma \text{ га}$$

көбөйтүлгөн экинчи мамыча кошулуп жазылып, III элементардык өзгөрүү ишке ашырылган. Ошентип A матрицасына өзгөртүүлөрдүн матрицасын сол жагынан көбөйткөндө, анын жолчолорунда, ал эми оң жагынан көбөйткөндө, анын мамычаларында элементардык I, II, III - өзгөртүүлөрү жүргүзүлөт. <

## §5.4 Матрицаларды сандарга чагылтып салыштыруу жана аларды колдонуу

### 5.4.1 Матрицанын аныктагычы

Матрица таблица болуп эсептелгендиктен, аны менен моделдештирилген кубулуштарды сандык чоңдугу боюнча баалап, салыштырып таануу зарылчылыгы келип чыгат. Ошондуктан квадраттык A матрицасынын аныктагычы ( $\det A$ ,  $\Delta_A$ , детерминанты) же сандык чоңдугу деп айтылган жаңы түшүнүк киргизебиз.  $2 \times 2$  менен  $3 \times 3$  тартиптердеги A матрицаларынын мисалында, алардын аныктагычтарын жазуу жана сандык маанисин эсептөө (1- гл., § 1.5) эрежелерин көрсөтөлү. Мисалы, экинчи тартиптеги квадраттык матрицага

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \leftrightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta_2, \quad (19)$$

$\Delta_2$  - саны тиешелеш коюлган. Үчүнчү тартиптеги квадраттык матрицага

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \leftrightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \quad (20)$$

$$- a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} = \Delta_3$$

$\Delta_3$  - саны тиешелеш коюлат. Ал эми биринчи тартиптеги бир элементтүү квадраттык матрицага  $(a_{11}) \leftrightarrow \det(a_{11}) = a_{11}$  санын өзү тиешелеш коюлат.

Жалпы учурда  $n$  - тартиптеги квадраттык матрицага, аныктагычтын 1-мамгычасын минорлору боюнча ажыратылып эсептелген

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \quad (21)$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = \Delta_n$$

бир гана  $\Delta_n$  саны тиешелеш коюлат (каалагандай жолчо же мамычанын минорлору менен ажыратсак да  $\Delta_n$  саны өзгөрбөйт). Мында аныктагычтын сандык мааниси биринчи мамычанын элементтерин минорлору боюнча эсептелип,  $M_{i1}$  берилген матрицанын аныктагычын  $(n-1)$  - тартиптеги минорлору болушат.

Ошентип квадраттык матрица таблица болгону менен, анын аныктагычы сан болуп, алардын арасында өз ара бир маанилүү тиешелештик орун алат. Бул өз ара бир маанилүү тиешелештикти пайдаланып, ар бир матрицанын жеке өзүнө гана сандык жактан мүнөздөмө бере ала тургандай аныктагычын түзөбүз. Матрицаларга сандык мүнөздөмө берүү менен алардын турмушта чөйрө таануу каражаты катарында колдонуу мүмкүнчүлүгүн кеңейтебиз.

Матрицаны элементардык өзгөртүп түзүүдө анын аныктагычы кандай өзгөрөрүн изилдейли. Ал үчүн аныктагычтардын сандык маанилерин табуу эрежелерине таянып (§1.5), элементардык өзгөртүүдөн кийинки жана баштапкы матрицалардын аныктагычтарын сандык маанилерин салыштырып көрөбүз:

### 1<sup>0</sup>. Матрицанын аныктагычын сызыктуулугу.

Айталы, үчүнчү тартиптеги квадраттык  $\Delta_3$  матрицасын аныктагычын экинчи жолчосун элементтери, кайсы бир  $\alpha_{2j}, \beta_{2j}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) сандарын сызыктуу комбинациясы болсун, анда аныктагычтардын касиети боюнча

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda\alpha_{21} + \mu\beta_{21} & \lambda\alpha_{22} + \mu\beta_{22} & \lambda\alpha_{23} + \mu\beta_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \lambda\alpha_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mu\beta_{21} & \mu\beta_{22} & \mu\beta_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \Delta_3' + \mu \Delta_3'' \quad (22)$$

**келип чыгат.**

Мында  $\Delta_3'$  деп биринчи,  $\Delta_3''$  деп экинчи кошулуучу аныктагычтарды белгиледик. (22) теңдештигинин туура экендигине  $\Delta_3$ ,  $\Delta_3'$ ,  $\Delta_3''$  аныктагычтарынын 1- жолчосу боюнча ажыратып көрүп ишенүүгө болот. Демек, аныктагычтын жолчосу кайсы бир сандардын сызыктуу комбинациясы болсо, аныктагычтын өзү да  $\Delta_3'$ ,  $\Delta_3''$  аныктагычтарынын сызыктуу  $\Delta_3 = \lambda \Delta_3' + \mu \Delta_3''$  комбинациясынан турат. Аны аныктагычтардын сызыктуулук касиети дейбиз, ал n - тартиптеги аныктагычтар үчүн да туура болот. Аныктагычтын мамычалары үчүн да ушундай сызыктуулук касиети орун алат.

**2<sup>0</sup>. Антисимметриялуулугу.**

**Матрицанын эки жолчосун (мамычасын) орундарын алмаштырып жазсак, анда анын баштапкы аныктагычы  $\Delta$ , кийинки  $\bar{\Delta}$  аныктагычынан белгиси менен гана айырмаланат. б.а.  $\Delta = -\bar{\Delta}$ .**

Чынында эле  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  болсо  $\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

болорун  $\Delta_3$  аныктагычын 1- жолчо,  $\bar{\Delta}_3$  аныктагычын 2 - жолчо боюнча эсептеп чыгып,  $\Delta_3 = -\bar{\Delta}_3$  теңдештиги аткарыларын көрөбүз.

**3<sup>0</sup>. A матрицасын аныктагычы менен транспонирленген  $A^T$  матрицасын аныктагычы дал келишет б.а.  $\det A = |A| = |A^T| = \det A^T$ .**

▷ Чынында эле

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{матрицаларын аныктагычтары}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

болушуп,  $|A|$  - ны биринчи жолчо, ал эми  $|A^T|$  - ны биринчи мамыча менен ачып чыксак, алардын

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31};$$

$$|A^T| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

барabar сандык маанилерге ээ болорун көрөбүз. <

**4<sup>0</sup>. Бирдей тартиптеги квадраттык А, В матрицаларын көбөйтүндүсүн аныктагычы, алардын аныктагычтарын көбөйтүндүсүнө барабар**

$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

Аныктагычтын §1.5 те көрсөтүлгөн касиеттерин жана азыркы 1<sup>0</sup> - 4<sup>0</sup> касиеттерин топтоштуруп, матрицанын аныктагычын практикалык эсептөөлөрдө колдонууга ылайыктуу айрым эрежелерин санап өтөбүз:

**1. Эки бирдей жолчосу (мамычасы) болгон матрицанын аныктагычы нөлгө барабар болот.**

Чынында эле матрицанын эки бирдей жолчосун (мамычасын) орундарын алмаштырып жазсак, анын аныктагычын белгиси өзгөрүшү  $\Delta = -\Delta$  керек. Бирок эки жолчодо тең бирдей элементтер болгондуктан, иш жүзүндө жолчолор алмашканы менен аныктагыч өзгөргөн жок. Ошондуктан  $\Delta = -\Delta$  теңдештиги  $\Delta = 0$  болсо гана аткарылат.

**2. Матрицанын жолчосуна (мамычасына) бир санды көбөйтүү, анын аныктагычына ошол санды көбөйткөнгө тең болгон өзгөртүү болот.**

Бул жогорудагы  $2^0$  касиетинде  $\mu = 0$  деп алганга барабар.

**3. Жолчосу (мамычасы) жалаң нөлдөр болгон матрицанын аныктагычы нөлгө барабар.**

Чынында эле аныктагычты ошол нөл жолчо боюнча ажыратып эсептесек, сандык мааниси нөл болот.

**4. Матрицанын кайсы бир жолчосу (мамычасы) экинчи бир жолчону (мамычаны) бир санга көбөйтүү менен алынса, б.а. тиешелүү элементтери пропорционалдуу болушса, анда аныктагычы нөлгө барабар болот.**

Чынында эле жалпы көбөйтүүчү санды аныктагычтын сыртына чыгарсак, анда берилген аныктагыч эки бирдей жолчого (мамычага) ээ болуп, сандык мааниси нөлгө тең болот.

**5. Эгерде аныктагычтын бир жолчосуна (мамычасына) кайсы бир жолчосун (мамычасын) бир санга көбөйтүп кошуп жазсак, анда аныктагычтын сандык мааниси өзгөрбөйт.**

Чынында эле аныктагычтын сызыктуулук касиети боюнча экинчи жолчосуна  $\lambda$  санына көбөйтүлгөн биринчи жолчосун кошуп чыксак

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} & a_{23} + \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \cdot 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

баштапкы аныктагычты кайра алабыз ( $\lambda$  санына көбөйтүлгөн аныктагыч эки жолчосу бирдей болуп 0 гө тең).

*Натыйжа:* Аныктагычтын каалаган жолчосуна калган жолчолорун сызыктуу комбинацияларын кошуп жазуудан анын сандык мааниси өзгөрбөйт.

## 5.4.2 Тескери матрицаны табуу ыкмалары

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$n$  - тартиптеги квадраттык матрицасына көбөйткөндө  $E$  бирдик матрицасы келип чыга тургандай  $A^{-1}$  квадраттык матрицасы,  $A$  матрицасына карата тескери матрица деп аталганын (5.2.3., 4<sup>0</sup>) билебиз

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \quad (25)$$

Берилген (24) матрицасына тескери матрица дайыма эле жашай бербейт, б.а. ал берилген матрицанын аныктагычын сандык маанисинен көз каранды болот.

**5.4.1 Аныктама.** Эгерде берилген  $A$  матрицасын (24) аныктагычы  $\det A = |A| \neq 0$  болсо, анда аны кубулбаган матрица, ал эми  $\det A = |A| = 0$  болсо, кубулган матрица деп айтабыз.

Ошентип квадраттык  $A$  матрицасы кубулбаган болсо, анда ага тескери болгон  $A^{-1}$  матрицасын бир маанилүү түрдө табууга болот, б.а. ар бир кубулбаган квадраттык матрицанын (25) шартын канааттандырган бир гана тескери матрицасы жашайт.

Тескери матрицаны табуунун эки ыкмасына токтолобуз ( $n=3$ ):

### 1. Кийиштирилген матрицалар усулу.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (26)$$

3 - тартиптеги кубулбаган матрица берилсин. Демек, анын аныктагычы

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ нөлдөн айырмалуу сандык мааниге ээ болот.}$$

Берилген (26) матрицасын аныктагычын элементтеринин  $A_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) алгебралык толуктоочторунан түзүлгөн

$$A^K = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (27)$$

матрица,  $A$  матрицасынын кийиштирилген матрицасы деп аталат.

Мында  $A_{ij}$  элементи деп  $|A|$  аныктагычын  $a_{ij}$  элементинин алгебралык

толуктоочун түшүнөбүз. Мисалы,  $A_{11}$  дин сандык мааниси  $M_{11}$  минору аркылуу

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

саны болорун билебиз. Ошондой эле

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32},$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13},$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23},$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad \text{сандары} \quad (27) \quad \text{матрицанын}$$

элементтери болушат. Ошентип  $A_{ij}$  матрицасын элементтери,  $A$  матрицасынын элементтери болушкан конкреттүү  $a_{ij}$  сандарын көбөйтүп, кошуп табылгандыктан, бир маанилүү болот, б.а. ар бир  $A$  матрицасына карата бир гана  $A^K$  кийиштирилген матрицасын түзө алабыз жана тескерисинче.

Кийиштирилген  $A^K$  матрицасын транспонирлейли

$$(A^K)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Бул  $(A^K)^T$  матрицасы өзгөчө касиетке ээ:

$$(A^K)^T A = A (A^K)^T = |A| E. \quad (29)$$

Мында  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  бирдик матрица.

(29) касиетинин тууралыгын текшерип көрүү үчүн  $A$  матрицасына  $(A^K)^T$  матрицасын сол жагынан көбөйтүп,



$$\begin{aligned}
A(A^K)^T &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \quad (30) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ээ болбуз. Бул (30) матрицасынын башкы диагоналдында турган  $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}$  элементтери  $A$  матрицасын аныктагычы болгон  $\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = |A|$  санына барабар болот. Чынында эле башкы диагоналда

$$\gamma_{ii} = \sum_{j=1}^3 a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \quad (i=1, 2, 3) \quad \text{элементтери жайгашып,}$$

алардын ар бири  $|A|$  аныктагычынын  $i$  – жолчосун  $A_{ij}$  алгебралык толуктоочтору боюнча ачып эсептегенге барабар болот. Башкы диагоналдан башка орундарда жайгашкан бардык элементтер  $\gamma_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = 0$  болору оңой эле текшерилет ( $i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3$ ).

Мисалы,

$$\begin{aligned}
\gamma_{21} &= a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = a_{21}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{22}(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) + a_{23}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = \\
&= a_{21}a_{22}a_{33} - a_{21}a_{32}a_{23} + a_{22}a_{31}a_{23} - a_{22}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{21}a_{32} - a_{23}a_{31}a_{22} = 0
\end{aligned}$$

болот (калганын өз алдыңарча текшерип көргүлө). Андай болсо (30) матрицасы

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot E \quad \text{көрүнүштө жазылат.}$$

Демек  $A(A^K)^T = |A| \cdot E$  теңдештиги орун алып, (29) туура болот.

Ушундай эле жол менен  $A$  матрицасына  $(A^K)^T$  матрицасын оң жагынан көбөйтүп,  $(A^K)^T \cdot A = |A| \cdot E$  болорун көрсөтүү мүмкүн. Ошентип (29) касиети каалагандай тартиптеги кубулбаган матрицалар үчүн туура болуп, анын эки жагын тең  $|A|$  санына бөлүп жибергенде

$\frac{1}{|A|} \cdot (A^k)^T \cdot A = E$  же  $A \cdot \frac{1}{|A|} \cdot (A^k)^T = E$  теңдештигине айланат. Мындан  $A$  матрицасына эки жагынан көбөйтсөк да, бирдик  $E$  матрицасы келип чыгуучу бир гана  $A^{-1}$  тескери матрицасы

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^k)^T \quad (31)$$

көрүнүштө табыларын көрөбүз. Тескери матрицаны мындайча табуу усулу кийиштирилген матрицалар ыкмасы деп аталат.

Берилген үчүнчү тартиптеги  $A$  квадраттык (26) матрицасын тескерисин жана (28), (31) барабардыктарын пайдаланып,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} \text{ же } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \quad (32)$$

көрүнүштөрдө жазабыз.

Ушундай эле талкуулоолор менен  $n$ -тартиптеги каалагандай кубулбаган матрицанын тескери матрицасын төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^k)^T = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \text{ же } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (32^A)$$

## II. Элементардык өзгөртүү түзүүлөр же Жордандын ыкмасы.

Үчүнчү тартиптеги квадраттык  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  матрицасы

кубулбаган болсун, анда анын кеңейтилген матрицасы деп

$$(A|E) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (33)$$

матрицасын айтабыз.

Кеңейтилген матрицанын эки бөлүгүндө тең эки бирдей элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзөбүз, б.а биринчи бөлүгүн бир жолчосун (мамычасын) бир санга көбөйтүп башка бир жолчосуна (мамычасына) кошсок, экинчи бөлүгүндө да ошол эле жолчосун (мамычасын), ошол эле санга көбөйтүп кошобуз. Кайсы бир жолчолорун (мамычаларын) орундарын алмаштырсак, экинчи бөлүгүндө да ошол эле жолчолорун (мамычаларын) орундарын алмаштырабыз. Ошентип олтуруп кеңейтилген  $(A|E)$  матрицасын биринчи бөлүгүндөгү  $A$  матрицасын баштапкы абалын, тепкичтүү диагоналдык көрүнүштөргө өзгөртүп олтуруп, бирдик матрица көрүнүшүнө келгенге чейин элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзө беребиз. Натыйжада кеңейтилген (33) матрицасы өзүнө окшош  $(E|A^{-1})$  кеңейтилген матрицасына өзгөрүп

$$(A|E) \sim (E|A^{-1}), \quad (34)$$

анын экинчи бөлүгүндө  $A^{-1}$  тескери матрицасы түзүлгөн болот. Мындай элементардык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен тескери матрицаны табуу Жордандын ыкмасы деп аталат.

$A$  матрицасына тескери болгон  $A^{-1}$  матрицасын (32) , (34) көрүнүштөрдө табуу менен, матрицалык  $AX=B$  же  $XA=B$  тендемелерин чыгаруу мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз.

$$\text{Мисалы, } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (|A| \neq 0), \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

бирдей тартиптеги квадраттык матрицалар болушуп,  $AX=B$  тендемеси берилсин. Тендемени чыгаруу үчүн эки жагын тең  $A^{-1}$  ге көбөйтүп,  
 $A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow EX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$  матрицалык тендеменин чечими болгон  $X$  матрицасын табабыз. Матрицалык тендеменин эки жагындагы

матрицалардын элементтерин теңдештирип, белгисиз  $x_{ij}$  элементтерин таба алабыз.

$$\text{Мисалы, } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A
X
B

матрицалык теңдемесин Жордандын ыкмасы боюнча чыгаралы. А матрицасынын кеңейтилген матрицасын түзүп, ага элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзөлү:

$$(A|E) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

Биринчи жолчону өзүндөй калтырып, экинчи жана үчүнчү жолчолордон биринчисин кемитип жаздык.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \sim$$

Экинчи мамыча менен үчүнчү мамычаларды орундарын алмаштырып, андан кийин экинчи, үчүнчү жолчолорду «-2» ге бөлүп жибердик.

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right).$$

Экинчи, үчүнчү жолчолорун өзүндөй калтырып, биринчи жолчого «-1» ге көбөйтүлгөн экинчи жолчону, андан кийин «-1» ге көбөйтүлгөн үчүнчү жолчону кошуп жаздык.

Акыркы кеңейтилген матрицанын экинчи бөлүгүнөн

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ тескери матрицасын табабыз. Берилген теңдеменин эки}$$

жагына тең  $A^{-1}$  матрицасын сол жагынан көбөйтүп:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

матрицалардын теңдештигине ээ болуп, матрица чечимди табабыз.

Мындан белгисиз болгон  $X$  матрицасынын

$$x_{11} = \frac{1}{2}, \quad x_{12} = \frac{1}{2}, \quad x_{13} = 1, \quad x_{21} = 0, \quad x_{22} = -\frac{1}{2}, \quad x_{23} = -1, \quad x_{31} = \frac{1}{2}, \quad x_{32} = 0, \quad x_{33} = -1,$$

элементтерин аныктай алабыз.

### 5.4.3 Матрицанын рангы

Матрицалардын  $R_{m \times n}$  мейкиндигинен алынган каалагандай  $m \times n$  –

$$\text{тартиптеги нөлдүк эмес } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (35)$$

матрицаны алалы. Анын  $K$  жолчодон жана  $K$  мамычадан турган квадраттык бөлүгүнүн аныктагычын

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad (36)$$

берилген  $A$  матрицасын  $k$  - тартиптеги минору деп, (36) көрүнүштө ажыратып жазайлы. Мында  $k = 1, 2, \dots, \min\{m, n\}$  маанилерин алат десек, анда (36) аныктагычты  $A$  матрицасынын кайсы бир  $1, 2, \dots, \min\{m, n\}$  - тартиптеги минорлорунун бири деп эсптөөгө болорун байкайбыз. Ыңгайлуулук үчүн (36) минорун, (35) матрицасын жогорку сол бурчунда жайгашкан деп тандап алалы. Жалпы учурда  $M_k$  минорун,  $A$  матрицасын элементтеринин белгилүү бир абалын сактап (берилген абалын же өзгөрткөндөн кийинки абалын), каалаган бөлүгүнөн  $k \times k$  - тартипте түзүүгө болот.

Мисалы,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$   $3 \times 4$  - тартиптеги матрицанын 1-

тартиптеги 12 минору, 2 - тартиптеги 6 минору, 3 - тартиптеги 2 минору бар. Бирок мындан чоң тартиптеги минору жок, анткени  $k = \min\{3, 4\} = 3$ .

**5.4.1 Аныктама.** Берилген  $A$  матрицасын нөлдөн айырмалуу минорлорунун арасынан, эң чоң тартиптеги минорунун тартиби,  $A$  матрицасын рангы деп аталат. Матрицанын рангын  $r = \text{rang } A$  деп белгилейбиз.

Ошентип матрицанын рангы  $0 \leq \text{rang } A \leq \min\{m, n\}$  аралыгында жайгашкан натуралдык сан болот. Эгерде  $r = 0$  болсо, анда (35) матрицасын бардык минорлору нөлгө барабар;  $r = 1$  болсо, бир гана элементтерден турган  $M_1$  минорлорун жок дегенде бирөөсү нөлдөн айырмалуу болуп, калган 1 ден чоң тартиптеги бардык минорлору нөлгө барабар;  $r = 2$  болсо, экинчи тартиптеги минорлорун жок дегенде бирөөсү нөл болбойт, ал эми 2 ден чоң тартиптеги бардык минорлору нөлгө барабар болушат;  $r = k$  болсо, анда жок дегенде бир  $k$  - тартиптеги  $M_k$  минорлорун бирөөсү нөлдөн айырмалуу, ал эми андан чоң  $k+1, k+2, \dots, \min\{m, n\}$  тартиптеги минорлорун баары нөлгө барабар деп түшүнөбүз.

Жогорудагы мисалда көрсөтүлгөн матрицанын рангы  $r=3$  саны болот. Анткени  $k=1$  болгондо,  $M_1^i$  бир элементтүү ( $i=1,..,12$ ) 12 минорлорун арасында нөлгө барабар эмес минорлору 8.  $k=2$  десек, анын экинчи тартиптеги 6 минорунун ичинен нөлдөн айырмалуу жок дегенде бир

$$M_2^i = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ минору табылат.}$$

$k=3$  десек, эки минордун жок дегенде бири (бул жерде экөөсү тең)

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \quad M_3^2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \text{ нөлдөн айырмалуу болушат.}$$

Андай болсо, мисалда берилген матрицанын нөлдөн айырмалуу минорлорун тартиптеринин эң чоңу

$$r = \max \left\{ k : M_k \neq 0, 0 \leq k \leq 3 \right\} = 3 = \min \left\{ 4, 3 \right\} \text{ саны болот.}$$

**5.4.2 Аныктама.** Нөлдөн айырмалуу  $M_r$  минорун тартиби  $A$  матрицасын рангы менен дал келсе, анда  $M_r$  - минорун базистик минор деп айтабыз.  $M_r$  базистик минорун элементтери жайгашкан  $A$  матрицасындагы жолчолорду жана мамычаларды матрицанын базистик жолчолору жана мамычалары дейбиз.

#### 5.4.1 Теорема.

1.  $A$  матрицасын базистик жолчолору (мамычалары) сызыктуу көз каранды эмес системаны түзүшөт.

2.  $A$  матрицасын каалагандай жолчосун (мамычасын) базистик жолчолордун (мамычалардын) сызыктуу комбинациясы катарында жазууга болот.

**1.–далилдөө:**  $\triangleright$  Далилдөөнү жолчолор үчүн жүргүзөлү. Ыңгайлуу болсун үчүн базистик  $M_r \neq 0$  минорун  $A$  матрицасын жогорку сол бурчунда жайгашкан деп ойлойлу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Анда  $a_1, a_2, \dots, a_r$  жолчолору базистик системаны түзүшөт. Бул жолчолордун ар бири  $n$  компоненттен турушат

$$\begin{aligned} a_1 &= \{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1r}, \dots, a_{1n}\} \\ a_2 &= \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2r}, \dots, a_{2n}\} \\ &\text{-----} \\ a_r &= \{a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rr}, \dots, a_{rn}\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Жолчолордун  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  коэффициенттүү сызыктуу комбинациясын түзөлү  $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \dots + a_r\lambda_r = 0$ . (40)

Тескерисинче, (39) жолчолорун сызыктуу көз каранды деп болжолдойлу, анда кандайдыр бир  $\lambda_i \neq 0$  болсо деле (40) барабардыгы орун ала берет ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Айталы  $\lambda_2 \neq 0$  болсо деле (40) орун алсын, анда экинчи жолчо  $a_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}a_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}a_3 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_2}a_r$  калган жолчолордун

сызыктуу комбинациясы катарында жазылып,  $M_r$  аныктагычын экинчи жолчосу жалаң гана нөл элементтерден турат. Бул учурда анын сандык мааниси  $M_r = 0$  болушу керек. Анда  $M_r$  базистик минор боло албайт. Демек, (39) жолчолорун сызыктуу көз каранды болсун деген болжолубуз туура эмес, анткени шарт боюнча алар сызыктуу көз каранды эмес жолчолордун системасын түзүшкөн базистик жолчолор болушат.

**Теореманын экинчи бүтүмүн далилдейли.**



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rj} & \dots & a_{rn} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{матрицасын каалагандай бир } i-$$

жолчосун алалы. Бул жолчо  $a_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}\}$  көрүнүштөгү  $n$  компоненттерден турат.

Эгерде тескерисинче  $a_i$ - жолчосун базистик жолчолордун (39) сызыктуу комбинациясы катарында жазуу мүмкүн болбосо, анда  $a_i$  жолчосу, (39) жолчолор менен чогуу сызыктуу көз каранды эмес системаны түзөт. Демек,  $A$  матрицасындагы базистик жолчолордун саны бирге чоңоюп  $r+1$  болот, же  $M_r \neq 0$  минорунан чоң болгон  $M_{r+1} \neq 0$  минору табылып,  $M_r$  минору базистик минор болбой калат. Бул карама - каршылык  $a_i$  жолчосун, базистик (39) жолчолордун сызыктуу комбинациясы катарында жазуу мүмкүн эмес деген тескери оюбуздун туура эместигин көрсөтөт, б. а.

$a_i = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_r a_r$  - көрүнүштө туюнтулат.

**Натыйжа-1.** Ошентип  $m \times n$  - тартиптеги каалагандай квадраттык эмес матрицалардын сандык чоңдугу, анын базистик минору деп аталган  $M_r$  аныктагычын сандык мааниси менен ченелет.

**Натыйжа-2.** Матрицада элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзүү, анын рангын өзгөртө албайт. Ошондуктан матрицанын рангын оңой табуу үчүн, аны элементардык өзгөртүүлөрдүн жардамы менен диагоналдык, тепкичтик абалдарга келтирүү керек.

## 8. Мисалдар

**9 - мисал.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$  матрицасына тескери болгон матрицаны

тапкыла.

**Чыгаруу:**▷ Матрицанын аныктагычын эсептейли:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 16 + 6 - 0 + 4 - 30 = -4 \neq 0. \quad \text{Демек, берилген}$$

матрица кубулбаган матрица болуп, анын бир гана  $A^{-1}$  тескери матрицасы табылат. Тескери матрицаны кийиштирилген матрицалар ыкмасы менен табалы.

$$A^k = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \text{ болгондуктан, анын элементтери}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \text{ сандары болушат.}$$

Кийиштирилген матрица  $A^K = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -8 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$  көрүнүштө болуп, аны

транспонирлеп

$$(A^K)^T = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix},$$

$A^{-1}$  тескери матрицасын

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^K)^T = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ көрүнүштө}$$

табабыз. <

**10 - мисал.**  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  матрицасына тескери  $A^{-1}$  матрицасын

Жордандын ыкмасы боюнча тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright \det |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 60 + 8 + 4 - 10 - 6 - 32 = 24 \neq 0.$

Берилген матрица кубулбаган матрица болгондуктан, анын бир гана тескери матрицасы жашайт.  $A$  матрицасын кенейтилген матрицасын түзүп, ага элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзөлү:

$$A |E = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

Биринчи жолчону 3 кө бөлүп жибердик.

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

Биринчи жолчону өзүндөй калтырып, 2 – жолчого «- 4» кө көбөйтүлгөн биринчи жолчону, 3 – жолчого «-2» санына көбөйтүлгөн биринчи жолчону кошуп жаздык. Андан кийин экинчи жолчону  $\frac{7}{3}$  кө бөлүп жибердик.

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} \end{array} \right) \sim$$

Экинчи жолчону өзүндөй калтырып, биринчи жолчого « $-\frac{2}{3}$ » ге көбөйтүлгөн экинчи жолчону, үчүнчү жолчого  $\frac{1}{3}$  ге көбөйтүлгөн экинчи жолчону кошуп жаздык. Андан кийин үчүнчү жолчону  $\frac{27}{4}$  кө бөлүп жибердик. Кийинки кадамда

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} \end{array} \right) \quad 3 - \text{чү жолчону өзүндөй калтырып, экинчи}$$

жолчого « $-\frac{2}{7}$ » ге көбөйтүлгөн үчүнчү жолчону, биринчи жолчого « $-\frac{1}{7}$ » ге көбөйтүлгөн үчүнчү жолчону кошуп жазып,  $(E | A^{-1})$  көрүнүштөгү акыркы кенейтилген матрицаны түздүк. Анын сол жагынан

$$A^{-1} = \left( \begin{array}{ccc} \frac{3}{4} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} \end{array} \right) \quad \text{тескери матрицаны табабыз. } \triangleleft$$

**11-мисал.**  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$  матрицасын рангын тапкыла.

**Чыгаруу.**  $\triangleright$  Бул матрицанын тартиби  $(3 \times 4)$  болуп, минорлорун эң чоңу  $k = \min\{3, 4\} = 3$  - тартипте болушу мүмкүн. 3 - тартиптеги минорлору экөө, алардын бири эле нөлдөн айырмалуу болсо, матрицанын рангы  $r = \text{rang} A = 3$  болот.

$$M^1_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -20, \quad M^2_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -116 \text{ болуп, үчүнчү}$$

тартиптеги эки минору нөлдөн айырмалуу экен. Андай болсо, берилген матрицанын нөлдөн айырмалуу минорлорун тартиптерин эң чоңу 3 санына барабар, же  $\text{rang } A = 3$ . <

**12-мисал.** Берилген  $4 \times 5$ -тартиптеги  $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

матрицасын рангын аныктагыла жана базистик жолчолор менен калган жолчолорун туюнткула.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  А матрицасын 2, 3 - мамычаларын жогорку бөлүгүнөн  $M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$  минорун алсак, сандык мааниси нөлгө барабар эмес болду. Калган 2- тартиптеги минорлорун текшерүүнүн зарылдыгы жок.

Үчүнчү тартиптеги минорлорун текшеребиз. Матрицанын жогорку сол бурчундагы элементтерден түзүлгөн

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 2 - 4 = 1 \neq 0 \text{ минорун сандык мааниси нөлгө}$$

барабар эмес. Калган 3 - тартиптеги минорлорун карабайбыз, анткени жок деген бирөөсүнүн нөлдөн айырмалуу болушу жетиштүү.

Төртүнчү тартиптеги эки минору бар, аларды биринчи жолчолору боюнча эсептеп:

$$M^1_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & -4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & -4 \end{vmatrix} = 22 - 48 + 27 - 1 = 0,$$

$$M^2_4 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$- 0 \begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 132 - 132 + 0 - 0 = 0$$

экөөнүн тең нөлгө барабар болорун көрөбүз.

Демек, берилген матрицанын нөлдөн айырмалуу сандык мааниге ээ болгон минорлорун тартиптерин эн чоңу  $r = 3$  саны, матрицанын рангы болот.

$$\text{Берилген матрицанын } M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \text{ минорун базистик минор}$$

деп (анын тартиби ранг менен тең),  $a_1, a_2, a_3$  жолчолорун базистик жолчолор катарында эсептейбиз. Базистик жолчолор

$$a_1 = \{2, -4, 3, 1, 0\}, \quad a_2 = \{1, -2, 1, -4, 2\}, \quad a_3 = \{0, 1, -1, 3, 1\}$$

компоненттерден турушат. Теоремага ылайык калган бир  $a_4 = \{4, -7, 4, -4, 5\}$  жолчосун - базистик жолчолордун сызыктуу

комбинациясы катарында жазууга болот  $a_4 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$ . Чынында

эле бул сызыктуу комбинацияны компоненттери боюнча

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{көрүнүштө жазып, } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

болгондо алардын тендештикке айланарын көрөбүз. <

$$\mathbf{13-мисал.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{көрүнүштөгү } 5 \times 3 \text{ - тартиптеги}$$

матрицанын рангын аныктап, базистик мамычалары менен калган мамычаларын сызыктуу туюнткула.

**Чыгаруу:** ▷ Берилген матрицада элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзгөндө, анын рангы өзгөрбөйт. Ошондуктан аны окшош матрицаларга өзгөртүп түзөлү:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

Мында биринчи жолчону экинчи жолчо менен алмаштырып, андан кийинки жаңы 2 - жолчону 5 - си менен алмаштырдык;

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1- жолчону өзүндөй калтырып, 2 - жолчого «-2» ге көбөйтүлгөн 1- жолчону, 3 - жолчого «-3» кө көбөйтүлгөн 1- жолчону кошуп жазып, 4 - жана 5 - жолчолорду өзүндөй калтырдык. Кийинки кадамда 2 - жолчону «-5» ке, 3 - жолчону «-11» ге, 4 - жолчону 5 ке, 5 - жолчону 2 ге бөлүп жибердик. Акыркы кадамда 1 - жана 2 - жолчолорду өзүндөй калтырып, калган жолчолордон 2 - жолчону кемитип жаздык. Ошентип берилген матрицаны элементардык өзгөртүүлөрдүн жардамы менен ага окшош матрицага айлантып, анын рангы  $r = 2$  болорун аныктадык. Анткени акыркы матрицада  $M_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \neq 0$ ,  $M_2^2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ , экинчи тартиптеги эки минорлору гана нөлдөн айырмалуу.

Биринчи жана экинчи мамычаларды базистик деп эсептеп, үчүнчү мамычаны алардын сызыктуу комбинациясы катары туюнтуп жазалы.

Мамычаларды  $b_1, b_2, b_3$  десек, анда бул туюнтуу  $b_3 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$  же

компоненттери боюнча 
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$
 көрүнүшүндө

жазылат. Чынында эле  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -2$  сандары табылып, бул сызыктуу комбинация аткарыларын көрүүгө болот.  $\triangleleft$

## §5.5 Сызыктуу теңдемелер системасы

### 5.5.1 Теңдемелер системасы түшүнүгү

Матрицалар жана аныктагычтар менен болгон амалдар, алардын касиеттери, элементардык өзгөртүп түзүүлөр сыяктуу аракеттердин баары, көп түспөлдүү же көп өзгөрүлмө чоңдуктардан көз каранды болгон кырдаалдарды, сызыктуу матрицалык теңдемелер же сызыктуу теңдемелер системасы катарында моделдештирип, алардын жүрүшүн матрицалар менен болгон амалдар аркылуу таанып үйрөнүү максатын көздөйт. Ошондой эле, санариптик технологиялардын түзүлүү структурасы да, матрицалар менен аныктагычтар теориясына негизделген.

Мисалы, картошканын жаңы өнүм – уругун өндүрүп тараткан Европадагы илимий тажрыйба чарбасынан Кыргызстанга ташып келип сатылган картошканын базар баасынын түзүлүү наркын моделдештирели:

Айталы, тажрыйба чарбасынын  $x_1$ - жеке ишкердин чыгымы,  $x_2$ - салык чыгымдары,  $x_3$ - болжогон пайдасы,  $b_i$ - сатылуу наркы болсун ( $b_1 = 10$  с,  $b_2 = 15$  с,  $b_3 = 20$  с). Анда бул окуянын математикалык

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 10 - \text{Европадагы баа,} \\ 0 \cdot x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 15 - \text{тобунан сатуу баасы,} \\ 0 \cdot x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 - \text{базарда сатуу баасы} \end{cases}$$

тилде, үч белгисиздүү сызыктуу теңдемелер системасы катары жазып, ушундай чыгымдар жана үстөк кошуулардан кийин, болжогон пайда алынабы? – деген суроого жооп издейли. Теңдемелер системасын

матрицалык көрүнүштө  $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}}_B$  жазып, кыскача  $A \cdot$

$X = B$  деп белгилөөгө болот. Мында  $A$  – “теңдемелер системасын



матрицасы”,  $X$  – “белгисиздердин матрицасы”,  $B$  – “бош мүчөлөрдүн матрицасы” деп аталышат.

Теңдемелер системасы чыгарылышка ээ (биргелешкен) болушу үчүн, анын матрицасынын аныктагычы  $\det A = \Delta \neq 0$  болушу керек.

а) Теңдемелер системасын аныктагычын эсептесек:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 - 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 -$$

$-2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1 \neq 0$  келип чыгат. Демек, теңдемелер системасын чечимдери жашайт.

б)  $x_1, x_2, x_3$  – белгисиздерин коэффициенттери турган мамычалардын ар бирин кезеги менен бош мүчөлөрдүн мамычасын алмаштырып, тиешелүү  $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$  аныктагычтарын маанилери болушкан

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 4 \\ 15 & 1/2 & 1/4 \\ 20 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + 15 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 20 - 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 -$$

$$-2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 10 - 15 \cdot 1 \cdot 3 = 15 + 120 + 5 - 40 - 5 - 45 = 50,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 4 \\ 0 & 15 & 1/4 \\ 0 & 20 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 \cdot 3 + 0 \cdot 20 \cdot 4 + 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 - 0 \cdot 15 \cdot 4 -$$

$$-20 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 - 0 \cdot 10 \cdot 3 = 45 - 5 = 40,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1/2 & 15 \\ 0 & 2 & 20 \end{vmatrix} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 + 0 \cdot 2 \cdot 10 + 1 \cdot 15 \cdot 0 - 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 -$$

$$-2 \cdot 15 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 20 = 10 - 30 = -20 \text{ сандарын табабыз.}$$

Мындан теңдемелер системасы  $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{50}{1} = 50$ ,  $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{40}{1} = 40$ ,  $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-20}{1} = -20$  чечимдерине ээ болору келип чыгат. Демек мындай кыял бизнес планы менен иш кылуудан пайда алуу мүмкүн эмес экендигин көрөбүз.

Албетте, Кыргызстандын базарындагы картошканын баасы менен Европадагы тажрыйба чарбасы өндүргөн картошканын өнүм - уругун

баасынын арасындагы байланыштарды башкача моделдештирүүгө да болот. Бирок, аны теңдемелер системасы көрүнүштө моделдештирүү, окуяны толук жана ачык түшүнүүгө, кайсы жерде катачылык кеткенин аныктоого мүмкүнчүлүк берет. Анткени, теңдемелер системасында баштапкы өндүрүүчүнүн чыгымдары менен ортомчулардын ар бир этаптагы чыгымдары салыштырылып, картошканын баасынын бардык этаптардагы сатуу наркынын калыптанышы боюнча маалыматтар камтылат.

Жалпы учурда  $n$  белгисиздүү сызыктуу  $m$  теңдемелер системасы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (41)$$

көрүнүштө жазылат. Аны

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} \text{ белгилөөрүн киргизүү менен}$$

$$A \times X = B \quad (41^A)$$

матрицалык теңдеме көрүнүштө жазууга болот. Мында  $b_j$  - бош мүчөлөр ( $j = 1, 2, \dots, m$ ),  $x_i$  - белгисиздер ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $A$  матрицасын элементтери болгон  $a_{ij}$  сандары, теңдемелер системасынын коэффициенттери болушат.  $X$  матрицасы белгисиздер мамычасы,  $B$  матрицасы бош мүчөлөрдүн мамычасы,  $A$  теңдемелер системасын матрицасы деп аталышат.

**5.5.1 Аныктама.** Эгерде  $x_1, x_2, \dots, x_n$  сандарынын тобу табылып, (41) теңдемелер системасына койгон кезде, анын ар бир теңдемесин теңдештикке айландырса, анда бул сандардын тобун (41) системасын чечимдери деп атап, (41) теңдемелер системасын чыгарылуучу же биргелешкен система дейбиз. Эгерде мындай шартты канааттандырган  $x_1, x_2, \dots, x_n$  сандарын тобу табылбаса, анда (41) теңдемелер системасын карама - каршылыктуу чечилбөөчү же

биргелешпеген теңдемелер системасы деп айтабыз (Белгисиздер биринчи даражада катышкандыктан сызыктуу деп аталат).

(41) теңдемелер системасын кенейтилген матрицасы деп

$$(A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ - & - & - & - & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (42)$$

матрицасын түшүнөбүз.

**5.5.1 Теорема.** Каалагандай (41) теңдемелер системасын биргелешкен болушу үчүн, бош мүчөлөрдүн  $B$  мамычасын элементтери,  $A$  матрицасын тиешелүү жолчолорунун сызыктуу комбинациялары катарында туюнтулушу зарыл жана жетиштүү.

**Далилдөө.** ▷ **1) Зарылдыгы:** Айталы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  сандарын тобу табылып, (41) теңдемесине койгондо аны теңдештикке айландырсын, башкача айтканда анын чечимдери болушсун. Анда (41) системасындагы каалагандай  $i$  – теңдемеси

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (43)$$

көрүнүштөгү теңдештик болот. Мындан  $b_i$  бош мүчөсү  $A$  матрицасынын  $i$  – жолчосун  $x_1, x_2, \dots, x_n$  коэффициенттүү сызыктуу комбинациясы экендигин көрөбүз.

**2) Жетиштүүлүгү:** Айталы (41) теңдемесин бош мүчөлөрүнүн мамычасындагы  $b_i$  элементтери,  $A$  матрицасын тиешелүү жолчосунун сызыктуу комбинациясы катарында туюнтулсун. Анда  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  сандары табылып,  $b_i$  санын  $A$  матрицасын  $i$  - жолчосун элементтери менен  $b_i = \lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \dots + \lambda_n a_{in}$  көрүнүштө туюнта алабыз. Мындан  $x_1 = \lambda_1, \quad x_2 = \lambda_2, \dots, x_n = \lambda_n$  сандарынын тобу табылып, (41) теңдемелер системасын чечимдери болорун көрөбүз. Демек, (41) системасы биргелешкен болот. <

(41) системасы биргелешкен учурда (43) сызыктуу комбинациясын:  $B$  бош мүчөлөрдүн мамычасын  $A$  матрицасын мамычаларынын

сызыктуу комбинациясы катары түшүнүп, компоненттери менен төмөндөгүдөй жазабыз:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (44)$$

### 5.5.2 Кронекер – Капеллинин теоремасы.

Каалагандай сызыктуу теңдемелер системасынын биргелешкен болушу үчүн, анын матрицасынын рангы менен кеңейтилген матрицасынын рангынын барабар болушу зарыл жана жетиштүү.

**Далилдөө.**

▷ **1) Зарылдыгы:** Айталы теңдемелер системасы биргелешкен болсун. Анын матрицасы менен кеңейтилген матрицасынын рангдары барабар болушун көрсөтөлү. (41) системасы биргелешкен болсо, анда 5.5.1 теоремасы боюнча кеңейтилген (42) матрицасын акыркы В мамычасы, А матрицасын мамычалары менен (44) көрүнүштө сызыктуу туюнтулат же болбосо, В мамычасы (A|B) кеңейтилген матрицасын калган мамычаларынан сызыктуу көз каранды болот, анда ал мамычанын элементтерин элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзүү менен нөлдөргө айлантат алабыз, же (A|B) матрицасын окшош  $(\tilde{A}|\bar{B})$  кеңейтилген матрицасына өзгөртүүгө болот. Өзгөргөн матрицанын акыркы мамычасы нөл элементтерден тургандыктан,  $(\tilde{A}|\bar{B})$  матрицасын рангына таасирин тийгизе албайт. Демек,

$$r = \text{rang}(A|B) = \text{rang}(\tilde{A}|\bar{B}) = \text{rang}(\tilde{A}) = \text{rang}A \quad (45)$$

болот (элементардык өзгөртүүдө матрицаны рангы өзгөрбөйт).

**2) Жетиштүүлүгү:** Айталы (41) системасын матрицасы менен кеңейтилген матрицасын рангдары барабар болсун  $\text{rang}A = \text{rang}(A|B)$ , (41) системасын биргелешкен болушун көрсөтөлү.

(45) теңдештиги орун алса, анда (A|B) матрицасын акыркы В мамычасын сызыктуу көз каранды деп, калган мамычалары менен (44) көрүнүштө сызыктуу туюнтууга болот. Анткени, тескерисинче В

мамчычасын сызыктуу көз каранды эмес деп ойлосо, анда  $(A|B)$  матрицасын рангы  $r$  болбостон  $r + 1$  болуп, (45) теңдештиги орун албай калмак. Демек, (44) көрүнүштөгү туюнтуу аткарылып, 5.5.1.-теоремасы боюнча (41) биргелешкен система болот.  $\triangleleft$

### **5.5.2 $n \neq m$ учурдагы теңдемелер системасын чечимдери. Жордан – Гаусстун ыкмасы**

Сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруу деп:

**1) Теңдемелер системасын биргелешкен же биргелешкен эмес экендигин аныктоону;**

**2) Эгерде система биргелешкен болсо, анда анын чечимдерин табууну түшүнөбүз.**

$n \neq m$  болгон учурда белгисиздердин саны  $n$  менен теңдемелердин саны  $m$  барабар эмес болот. Айталы (41) сызыктуу теңдемелер системасы биргелешкен болуп,  $r = \text{rang}A = \text{rang}(A/B)$  шарты аткарылсын.  $M_r$  базистик минорун  $A$  матрицасын жогорку сол бурчунан алалы. Теңдемелер системасын  $A$  матрицасын рангы  $r$  болгондуктан, анын  $r$  жолчодон турган базистик жолчолору болот. Ал эми калган жолчолорун баары бул базистик жолчолордун сызыктуу комбинациясы катарында туюнтулат. Же болбосо алгачкы  $r$  жолчолордон башка жолчолорду, ошол эле  $r$  жолчолордун кайра кайталанышы катарында жазууга боло тургандай өзгөртө алабыз. Андай болсо, (41) теңдемелер системасын  $m$  теңдемелерин алгачкы  $r$  теңдемесинин арасындагы кайсы бирлери, кийинки  $r + 1, r + 2, \dots, m$  теңдемелеринде кайра кайталанып жазылган болот. Бул кайталанма теңдемелердин бирөөсүн гана калтырып, калган  $m - r$  сандагы кайталангандарын таштап жиберсек,  $n$  белгисиздүү кыскарган  $r$  теңдемелер системасына ээ болобуз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{-----} \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \quad (46)$$

Бул теңдеменин  $x_1, x_2, \dots, x_r$  базистик белгисиздерин сол жагында калтырып, калгандарын оң жагына өткөрүп жазсак,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \text{-----} \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases} \quad (47)$$

$r$  белгисиздүү  $r$  теңдемелер системасына ээ болобуз.

(41) теңдемелер системасын  $x_1, x_2, \dots, x_r, \dots, x_n$  чечимдерин тобу (46), (47) системаларын да канааттандыргандыктан, үчөөнү эквиваленттүү теңдемелер системалары дейбиз. Ал эми алардын чечимдерин тобун экиге бөлөбүз:

- 1)  $x_1, x_2, \dots, x_r$  - **базистик чечимдер;**
- 2)  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  - **эркин тандалуучу чечимдер.**

Ошентип белгисиздердин саны  $n$  менен теңдемелердин саны  $m$  бири - бирине барабар эмес ( $m \neq n$ ) болгон учурда, (41) теңдемелер системасы биргелешкен болсо, б.а. чыгарууга мүмкүн болсо, анда чечимдердин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  сыяктуу тобун чексиз көп ыкмалар менен топтоштуруп түзүүгө болот, б.а. системанын чексиз көп чечимдери жашайт. Анткени

$x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, \dots, x_n = c_{n-r}$  сыяктуу эркин тандалуучу  $c_i$  сандарын ( $i = 1, 2, \dots, n-r$ ) каалагандай тандай берүүгө болот. Ал эми  $x_1, x_2, \dots, x_r$  базистик чечимдери ар бир тандалган  $c_i$  сандары үчүн ар башка болуп табылат. Жалпы учурда  $n \neq m$  болгондо, биргелешкен (41) системасын чечимин мамыча матрица

$$X = X(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) \\ x_2(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} \quad (48)$$

көрүнүштө табабыз. Ал эркин тандалган  $c_i$  сандарынан көз каранды болгон  $x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$  сыяктуу чексиз көп топтордон турат ( $i = 1, 2, \dots, n-r$ ).

$n \neq m$  болсо да, белгисиздердин саны  $n$  менен  $A$  матрицасын рангы  $n = \text{rang} A$  барабар болсо, анда (41) теңдемелер системасы бир гана  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  тобунан турган чечимдерге ээ болот.

(48) көрүнүштөгү чечимдерди табуу үчүн, (41) теңдемелер системасын  $(A/B)$ - кеңейтилген матрицасын элементардык өзгөрүүлөрдү жүргүзүү менен ага окшош  $(\tilde{A}/\tilde{B})$  тепкичтүү абалга келтиребиз.  $\text{rang}(A/B) = \text{rang}(\tilde{A}/\tilde{B}) = \text{rang} A = r$  болгондуктан, бир канча кадамдардан турган элементардык өзгөртүүлөрдөн кийин

$$(A/B) \sim (\tilde{A}/\tilde{B}) = \left( \begin{array}{cccccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1r+1} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2r+1} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{rr} & \tilde{a}_{rr+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{b}_1 & -\tilde{a}_{1r+1} & \dots & -\tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{b}_2 & -\tilde{a}_{2r+1} & \dots & -\tilde{a}_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{rr} & \tilde{b}_r & -\tilde{a}_{rr+1} & \dots & -\tilde{a}_{rn} \end{array} \right) \quad (47^A)$$

тепкичтүү көрүнүшкө келтиребиз. Акыркы жолчону  $X$  матрица мамычасына көбөйтүп теңдештирип,

$$\tilde{a}_{rr} \cdot x_r = \tilde{b}_r - \tilde{a}_{rr+1} x_{r+1} - \dots - \tilde{a}_{rn} x_n \text{ же}$$

$$x_r = \frac{\tilde{b}_r}{\tilde{a}_{rr}} - \frac{\tilde{a}_{rr+1}}{\tilde{a}_{rr}} x_{r+1} - \dots - \frac{\tilde{a}_{rn}}{\tilde{a}_{rr}} x_n \text{ туюнтулушуна ээ болобуз. Ага}$$

$x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, \dots, x_n = c_{n-r}$  эркин маанилерди берүү менен  $x_r$  ди табабыз. Табылган  $x_r$  мааниси  $(r-1)$ - жолчого койсок,  $x_{r-1}$  аныкталат. Ушундай процессти улантуу менен калган  $x_{r-2}, \dots, x_2, x_1$

белгисиздерин табабыз. Натыйжада (48) көрүнүштөгү чечимди тапкан болобуз. Чечимдердин тобун табууда матрицалардагы элементардык өзгөртүүлөрдү пайдалануу Жордан - Гауссун ыкмасы деп аталат.

Эгерде элементардык өзгөртүүлөрдүн жүрүшүндө  $(A/B)$  кеңейтилген матрицасы

$$(\tilde{A}/\tilde{B}) = \left( \begin{array}{cccccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1r+1} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2r+1} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ \tilde{a}_{r1} & \tilde{a}_{r2} & \dots & \tilde{a}_{rr} & \tilde{a}_{rr+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

көрүнүшкө өзгөрсө, анда система биргелешпеген болот. Анткени  $\tilde{A}$  матрицасын  $r+1$  - жолчосу жалаң нөлдөрдөн турганы менен,  $\tilde{B}$  мамыча матрицасын  $r+1$  - жолчосунда нөлдөн айырмалуу  $\tilde{b}_{r+1}$  - саны туруп, аны нөлдөрдүн сызыктуу комбинациясы катарында жазуу мүмкүн эмес.

### 5.5.3 $n = m$ болгон учур. Крамердин эрежеси

Бул учурда (41) сызыктуу теңдемелер

$$\text{системасында} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{-----} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (49)$$

белгисиздер менен теңдемелердин саны тең  $n$  болуп, анын матрицасы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (50)$$

квадраттык  $(n \times n)$ - тартиптеги матрица болот.



Эгерде (50) матрицасы кубулбаган  $\det A = |A| \neq 0$  же  $\text{rang} A = n$  болгон матрица болсо, (49) теңдемелер системасы биргелешкен болуп, бир гана  $x_1, x_2, \dots, x_n$  тобунан турган чечимге ээ.

Чынында эле (49) системасын  $A \cdot X = B$  матрицалык көрүнүштө жазсак,  $\det A = |A| \neq 0$  болгондуктан,  $A$  матрицасына карата тескери  $A^{-1}$  матрицасы табылып, матрицалык көрүнүштөгү теңдеменин эки жагын тең  $A^{-1}$  ге көбөйтсөк:  $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} B$  же  $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$  же  $X = A^{-1} \cdot B$  же

$$X \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^K)^T \cdot B = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ - \\ b_n \end{pmatrix} \quad (51)$$

чечимдерин табуу эрежесине ээ болобуз.

(51) Крамердин эрежеси деп аталып, анын оң жагындагы амалдарды аткарган соң, конкреттүү бир  $x_j$  белгисизи

$$x_j = \frac{1}{|A|} \cdot \sum_{k=1}^n b_k A_{kj} \quad (j=1, 2, \dots, n) \text{ көрүнүштө табылат.}$$

$$\text{АНЫ } x_j = \frac{\begin{matrix} j\text{- мамыча} \downarrow \\ \left| \begin{matrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right| \end{matrix}}{\left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right|} = \frac{\Delta_{x_j}}{\Delta} \quad (52)$$

көрүнүштө эске тутуу ыңгайлуу.

Мында  $\Delta = |A|$ , ал эми  $\Delta_{x_j}$  деп  $|A|$  аныктагычынын  $j$ - мамычасын элементтерин, бош мүчөлөрдүн  $B$  мамычасы менен алмаштыруудан алынган аныктагычты белгилейбиз.

Аныктагычтарды эсептөө убарагерчиликтүү болгондуктан Крамердин эрежеси эки, үч белгисиздүү теңдемелер системаларын чыгарууда ыңгайлуу. Белгисиздердин саны 4 төн көп болгон теңдемелер системаларын чыгарууда элементардык өзгөртүп түзүүлөргө негизделген Жордан – Гаусстун ыкмасын колдонуу ыңгайлуу болот. Ал үчүн:

1) (49) теңдемелер системасын матрицасы  $A$  кубулбаган болушу ( $\text{rang}A = n$  же  $(|A| \neq 0)$ ) керек.

$$2) (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \text{ кеңейтилген матрицасы}$$

түзүлөт.

3) Бир канча кадамдардан турган элементардык өзгөртүп түзүүлөрдөн кийин  $(A|B)$  матрицасы

$$(\tilde{A}|\tilde{B}) = \left( \begin{array}{cccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n \end{array} \right) \text{ же } (\tilde{A}|\tilde{B}) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{b}_2 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_n \end{array} \right)$$

көрүнүштөргө келтирилип,  $X$  мамычасына көбөйтүлүп, теңдештирүү менен  $x_1, x_2, \dots, x_n$  белгисиздери табылат.

**Эскертүү.** Эгерде  $n = m$  болгон учурда,  $(\det A = 0)$   $A$  матрицасы кубулган матрица болсо да  $r$  рангы табылып,  $\text{rang}A = r = \text{rang}(A|B)$  шарты аткарылса, анда анын бир маанилүү чечимдери жашабаганы менен, чексиз көп топтордон турган (48) сыяктуу көп маанилүү чечимдери жашашы мүмкүн.

## 9. Мисалдар

$$\mathbf{14\text{-мисал.}} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

теңдемер системасын бир маанилүү чечимдери жашайбы?

**Чгаруу:** ▷ Анын матрицасын жана кеңейтилген матрицасын түзөлү.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 & | & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & | & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & | & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{теңдеменин аныктагычы}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 1 & -7 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} -$$

$$-3 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 0 - 0 + 3 \cdot 0 = 0$$

болгондуктан, теңдемелер системасын матрицасы кубулган болуп, берилген теңдемелер системасы биргелешпеген болот. Демек, бир маанилүү бир гана  $x_1, x_2, x_3, x_4$  тобунан турган чечимге ээ боло албайт. ◁

$$\mathbf{15\text{-мисал.}} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases} \quad \text{үч белгисиздүү төрт}$$

теңдемелер системасын чыгаргыла.

**Чыгаруу:** ▷  $n \neq m$  болгондуктан анын кеңейтилген матрицасын түзүп,  $(A|B)$  жана  $A$  матрицаларын рангдарын аныктайлы.

$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \end{array} \right) \sim$$

Биринчи жолчо менен төртүнчү жолчону алмаштырып жаздык.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array} \right) \sim$$

1- жолчону өзүндөй калтырып, 2 - жолчого «-4» кө көбөйтүлгөн 1 - жолчону коштук. 3 - жолчого «-2» ге көбөйтүлгөн 1- жолчону кошуп, 4 - жолчого да «-2» ге көбөйтүлгөн 1- жолчону кошуп жаздык. Экинчи кадамда 1, 4 - жолчолорду өзүндөй калтырып, 2 - жолчого «-2» ге көбөйтүлгөн 3 - жолчону, ал эми 3 - жолчого «-1» ге көбөйтүлгөн 4 - жолчону коштук.

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 28 & 28 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim$$

Бул жердеги кадамдардын башында 1, 3, 4 – жолчолорду өзүндөй калтырып, 2 - жолчону 3- жолчодон кемитип жаздык, андан кийинки кадамда 1- чи, 2 - жолчону өзүндөй калтырып, 3 - жолчону 2 – жолчого «-2» ни көбөйтүп, кошуп жазганбыз, 4 - сүнө «-11» ге көбөйтүлгөн 2 - син коштук. Акыркысында 3 - жолчону 7 ге, 4 - жолчону 29 га бөлүп жибердик. Төртүнчү жолчодон үчүнчүсүн кемитип,

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (\tilde{A}|\tilde{B}) \quad \text{тепкичтүү көрүнүштөгү матрицага ээ}$$

болбуз. Мындан  $\tilde{A}$  матрицасында жок дегенде бир

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \quad \text{нөлдөн айырмалуу үчүнчү тартиптеги}$$

минору табылып,  $\text{rang} A = \text{rang} \tilde{A} = 3$  болорун билебиз. Ошондой эле кеңейтилген  $(\tilde{A}|\tilde{B})$  матрицасында да

$$M_3 = \begin{vmatrix} +8 & -7 & 12 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 8 & 12 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 20 - 23 = -3 \neq 0$$

нөлдөн айырмалуу үчүнчү тартиптеги минору бар. Демек,  $\text{rang}(A|B) = \text{rang}(\tilde{A}|\tilde{B}) = 3$  болуп, Кронекер - Капеллинин теоремасын  $\text{rang} A = \text{rang}(A|B) = 3$  шарты аткарылат.

Белгисиздердин саны  $A$  матрицасын рангы менен барабар болгондуктан, берилген теңдеменин бир гана  $x_1, x_2, x_3$  тобунан турган чечими жашайт.

Элементардык өзгөртүүнүн жардамы менен берилген теңдемеге эквиваленттүү теңдеме түзсөк,

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12, \\ -x_2 - 2x_3 = -4, \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{келип чыгып,} \quad x_3 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_1 = 1$$

чечимдерин жалгыз тобун табабыз.  $\triangleleft$

**16-мисал.** 
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 - 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases} \quad \text{беш}$$

белгисиздүү үч теңдемелер системасын чыгаргыла .

**Чыгаруу:**  $\triangleright m = 3, n = 5$  же  $m \neq n$  учурдагы теңдеменин

$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \quad \text{кеңейтилген матрицасын рангын}$$

аныктоодо Жордандын элементардык өзгөртүп түзүүлөр ыкмасын

пайдаланып, 
$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) = (\tilde{A}|\tilde{B}) \quad \text{ээ болобуз. Бул}$$

өзгөртүүлөрдүн биринчи кадамында 1- жолчону өзүндөй калтырып, 2 - жолчого «-1» ге көбөйтүлгөн 1- жолчону кошуп, 3 - жолчого «-2» ге көбөйтүлгөн 1- жолчону кошуп жаздык. Экинчи кадамда 1, 2 - жолчолорду өзүндөй калтырып, 3 - жолчого 2 - син кошуп жибердик.  $\tilde{A}$  матрицасында 3 - тартиптеги минорлордун баары нөлгө барабар, анткени алардын үчүнчү жолчосу жалаң нөлдөрдөн турат. Ал эми 2 - тартиптеги

нөлдөн айырмалуу бир канча минорлору бар, мисалы

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0. \text{ Ошондуктан } \text{rang} A = \text{rang } \tilde{A} = 2 \text{ болот.}$$

$(\tilde{A}|\tilde{B})$  матрицасында нөлдөн айырмалуу 3 - тартиптеги жок дегенде

$$\text{бир минору бар, мисалы } M_3 = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ -11 & -4 \end{vmatrix} = 213 \neq 0. \text{ Анда}$$

$\text{rang}(A|B) = \text{rang}(\tilde{A}|\tilde{B}) = 3$  болуп,  $\text{rang} A \neq \text{rang}(A|B)$  болгондуктан, берилген теңдеме биргелешпеген же чыгарылышы жок деген жыйынтыкка келебиз. <

$$\mathbf{17\text{-мисал.}} \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} \quad \text{төрт белгисиздүү үч}$$

теңдемелер системасын чыгаргыла.

**Чыгаруу:** Берилген теңдемелердин кеңейтилген

$$(A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right) \text{ матрицасын жана теңдемелер системасынын } A$$

матрицасын рангдарын Жордандын ыкмасы боюнча аныктайлы.  $(A|B) =$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{array} \right) \sim$$

Бул өзгөртүүдө 1- жолчо өзүндөй калып, 2 - жолчодон 2 ге көбөйтүлгөн 1- жолчо кемитилди. 3 - жолчодон 3 кө көбөйтүлгөн 1- жолчо кемитилип жазылды.

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (\tilde{A}|\tilde{B}) \quad \text{Акыркы өзгөртүү кадамында 1, 2 -}$$

жолчолору өзүндөй калып, 3 - жолчодон 2 ге көбөйтүлгөн экинчи жолчо кемитилип жазылды.

Ошентип  $(A|B)$  матрицасын элементардык өзгөртүүлөрдүн натыйжасында, ага окшош  $(\tilde{A}|\tilde{B})$  матрицасын алдык.  $(\tilde{A}|\tilde{B})$  матрицасын үчүнчү жолчосу жалаң нөлдөрдөн тургандыктан, анын экинчи тартиптеги минорлору гана нөлдөн айырмалуу боло алат.

$$\text{Мисалы, } M_2^1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \quad M_2^2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0, \text{ ошондуктан}$$

$\text{rang}(A|B) = \text{rang}(\tilde{A}|\tilde{B}) = 2$ , ал эми  $M_2^1 \neq 0$  минору А матрицасына да минор болгондуктан,  $\text{rang}A = \text{rang}\tilde{A} = 2$  болуп, Кронекер - Капеллинин теоремасын шарттары аткарылат же берилген система биргелешкен болот. Бирок анын эки белгисиздери гана базистик болуп, калган экөөсү

эркин тандалуучу чечимдер болушат. Биз  $M_2 = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$

миноруна таянып, базистик деп  $x_2, x_3$  базистик белгисиздерине карата берилген теңдемени

$$\begin{cases} -2x_2 + 5x_3 = 2 - 3x_1 - 4x_2, \\ -6x_3 = -1 + 5x_4 \end{cases} \quad \text{көрүнүштөгү эквиваленттүү}$$

теңдеме менен алмаштырабыз.

Эркин тандалуучу чечимдерге  $x_1 = c_1, x_4 = c_2$  каалагандай сандык

маанилерин берип,  $x_3 = \frac{1}{6}(1 - 5c_2)$ ,

$$x_2 = \frac{1}{2} \left\{ -2 + 3c_1 + 4c_2 + 5 \left[ \frac{1}{6}(1 - 5c_2) \right] \right\} = \frac{1}{12}(-7 + 18c_1 - c_2)$$

чечимдерин табабыз.

Жалпы чечимдер  $x_1 = c_1, x_2 = \frac{1}{12}(18c_1 - 7 - c_2), x_3 = \frac{1}{6}(1 - 5c_2), x_4 = c_2$

сандарын тобунан куралып,  $c_1, c_2$  сандарынан көз каранды болгон чексиз көп топтордон турат. Ошондуктан чечимди мамыча көрүнүштө

$$X = X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} x_1(c_1) \\ x_2(c_1, c_2) \\ x_3(c_2) \\ x_4(c_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{1}{12}(18c_1 - 7 - c_2) \\ \frac{1}{6}(1 - 5c_2) \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ жазууга болот. } \triangleleft$$

$$\mathbf{18\text{-мисал.}} \begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + y - 2z = 1, \\ -x + 2y - 4z = 3 \end{cases} \text{ теңдемелер системасын}$$

чыгаргыла.

**Чыгаруу:** > Берилген теңдемелер системасын матрицасынын

аныктагычы  $|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 4 + 1 + 4 - 16 = -15 \neq 0$  болуп,

матрицасы кубулбаган болот. Анда анын жалпы чечими  $x, y, z$  чечимдерин тобунаан турган бир гана топ болот. Чынында эле Крамердин

(52) эрежеси боюнча,  $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ ,  $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ ,  $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$  чечимдерди табууга

болот.

Биринчи мамычаны бош мүчөлөрдүн мамычасы менен

алмаштырып,  $\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 12 + 2 - 3 + 16 - 8 = 3$  ээ болобуз.

Экинчи мамычаны бош мүчөлөрдүн мамычасы менен алмаштырып,

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 6 + 1 + 6 + 32 = 49, \text{ үчүнчү мамычаны бош}$$

мүчөлөрдүн мамычасы менен алмаштырып,

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 16 + 2 + 4 - 2 + 12 = 35 \text{ сандарын аныктайбыз. Анда}$$

$$y = \frac{49}{-15} = -3\frac{4}{15}, \quad x = \frac{3}{-15} = -\frac{1}{5},$$

$$z = -\frac{35}{15} = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3} \text{ үчтүгү чечимдердин жалгыз гана тобу болот.}$$



## §5.6 Бир тектүү сызыктуу теңдемелер системасы

### 5.6.1 Бир тектүү теңдемелер системасын чечимдери

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \quad (53)$$

көрүнүштөгү  $n$  белгисиздүү  $m$  теңдемелер системасы бир тектүү сызыктуу теңдемелер системасы деп аталат. (41) теңдемелер системасынан өзгөчөлөнүп, В бош мүчөлөрдүн мамычасы «нөл» мамычадан турат.

(53) системасын  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  - теңдемелер системасын

матрицасы менен,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  белгисиздердин мамыча матрицасы аркылуу,

матрицалык теңдеме көрүнүштө:  $A \cdot X = 0$  (53\*)

жазып, чечимдерин табуу ыкмаларын карайбыз.

1. Бир тектүү сызыктуу теңдемелердин (53) системасы белгисиздердин саны  $n$  жана теңдемелердин саны  $m$  кандай болгонуна карабастан биргелешкен болуп, жок дегенде бир тривиалдык (нөлдүк)

$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  чечимге ээ болорун байкайбыз. Чынында эле, бардык

$x_i = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) маанилерин (53) кө койсок, аны теңдештикке айландырат.

Ошентип, (53) бир тектүү системасын ар качан нөлдүк чечимдери бар экенин билсек да, анын нөлдүк эмес чечимдерин табуу жолдорун издейбиз.

II. Теңдемелердин саны  $m$  белгисиздердин саны  $n$  ден кичине ( $m < n$ ) болгон учурда, (53) системасын  $A$  матрицасынын рангы болгон  $r = \text{rang}A < n$ ,  $r \neq 0$  санын аныктоо мүмкүн болсо, анда  $A$  матрицасын  $M_r$  базистик минору жашайт.  $M_r \neq 0$  базистик минорун  $A$  матрицасын жогорку сол бурчунда жайгашат деп ойлоп, (53) системасын ага эквиваленттүү болгон кыскартылган

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = -a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \text{-----} \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases} \quad (54)$$

бир тектүү эмес теңдемелер системасына өзгөртүп түзөбүз. (54) теңдемелер системасында  $r$  сандагы базистик,  $n - r$  сандагы эркин чечимдер болгондуктан, (53) системасын чечимдери да экиге бөлүнүшөт:

- 1)  $x_1, x_2, \dots, x_r$  - базистик чечимдер;
- 2)  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  - эркин тандалуучу чечимдер болушат.

Эркин тандалуучу чечимдерге  $x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, \dots, x_n = c_{n-r}$  каалагандай сандык маанилерди берсек, анда (53) системасын нөлдүк эмес чечими  $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$  сандарынан көз каранды болгон (48) чечимдери сыяктуу,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) \\ x_2(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) \\ \text{-----} \\ x_r(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) \\ \quad c_1 \\ \quad c_2 \\ \text{-----} \\ \quad c_{n-r} \end{pmatrix}, \quad (55)$$

мамчыча - матрица көрүнүштө көрсөтүлгөн чексиз көп  $n$  компоненттүү топтордон турат. Бул чечимдердин ар бирин

$r + (n - r) = n$  координаталуу  $\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_r, c_1, c_2, \dots, c_{n-r}\}$  вектор - чечим деп түшүнүүгө да болот.

Бир тектүү (53) теңдемелер системасын (55) көрүнүштөгү чексиз көп нөлдөн айырмалуу чечимдери эки касиетке ээ:

1°. Эгерде  $X^1$  жана  $X^2$  чечимдерин тобу (53) системасын нөлдүк эмес чечимдери болушса, анда алардын суммасы  $X^1 + X^2$  да нөлдүк эмес чечим болот.

▷ Чынында эле (53) системасы (53\*) матрицалык теңдеме көрүнүштө  $A \cdot X^1 = 0$  жана  $A \cdot X^2 = 0$  болсо, анда матрицаларды көбөйтүүнүн касиети боюнча  $A(X^1 + X^2) = AX^1 + AX^2 = 0 + 0 = 0$  теңдештигине ээ болуп,  $X^1 + X^2$  да чечим болорун көрөбүз. ◁

Бул касиет санактык сандагы чечимдердин суммасы үчүн да туура болот.

2°. Эгерде  $X$  чечимдерин тобу (53) системасын нөлдүк эмес чечими болсо, анда  $\forall \lambda \in R$  саны үчүн  $\lambda \cdot X = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n\}$  чечимдерин тобу да ага чечим болот.

Матрицаларды  $\lambda$  санына көбөйтүү эрежесин эстесек, (53) төн бул  $A(\lambda \cdot X) = \lambda \cdot AX = \lambda \cdot 0 = 0$  касиеттин туура экендигин көрсөткөн болобуз.

### 5.6.2 Бир тектүү теңдемелер системасын чечимдеринин сызыктуу мейкиндиги

Бир тектүү (53) сызыктуу теңдемелер системасы,  $r < n$  учурда  $n$  координаталуу чексиз көп (55) көрүнүштөгү мамыча – матрица же  $n$  координаталуу чексиз көп вектор - чечимдерге ээ болушу мүмкүн экенин көрдүк. Чексиз көп вектор - чечимдеринин (мамыча - матрица чечимдерин) көптүгүн  $V$  тамгасы менен белгилейли.

Чечимдердин суммасы да,  $\lambda$  чыныгы санына көбөйтүндүсү да чечимдер болушкандыктан,  $V$  көптүгүндө кошуу жана  $\lambda$  чыныгы санына көбөйтүү амалдары аткарылып, ушул амалдарга карата сызыктуу мейкиндиктин бардык шарттарын канааттандырышат.

Чынында эле  $X, X^1, X^2, X^3$  каалагандай вектор - чечимдер, ал эми  $\lambda, \mu$  каалагандай чыныгы сандар болушса, чечимдердин жогорудагы эки  $1^0, 2^0$  касиеттери боюнча

$X^1, X^2 \in V \Rightarrow X^1 + X^2 \in V; X \in V \Rightarrow \lambda X \in V$  болуп, төмөндөгү

сызыктуулук шарттары да аткарылат:

1)  $(X^1 + X^2) + X^3 = X^1 + (X^2 + X^3)$ - ассоциативдүү;

2)  $X^1 + X^2 = X^2 + X^1$  – коммутативдүү;

3)  $V$  көптүгүндө нөл элементи болгон тривиалдык  $0 = \{0, 0, \dots, 0\}$

( $n$  компоненттүү) чечими жашап, каалагандай чечимге кошсок  $X + 0 = X$  шартын канааттандырат;

4)  $V$  көптүгүндөгү каалагандай  $X$  чечимине карама - каршы « $-X$ » элементи же чечими табылып,  $X - X = 0$  болот;

5)  $\lambda(X^1 + X^2) = \lambda X^1 + \lambda X^2$ ;                      7)  $\lambda(\mu X) = (\lambda \mu)X$ ;

6)  $(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X$ ;                      8)  $E \cdot X = X$  боло тургандай «бирдик»

$E = 1 = \{1, 1, \dots, 1\}$  ( $n$  компоненттүү) бирдик элементи жашайт.

Ошондуктан  $r = \text{rang}A < n$ ,  $r \neq 0$  болгон учурда, (53) теңдемелер

системасын бардык нөлдүк жана нөлдүк эмес чечимдерин көптүгүн  $V$  сызыктуу мейкиндиги деп белгилейбиз. Эгерде  $V$  мейкиндигин элементи болгон ар бир  $X$  чечимин  $n$  координаталуу вектор деп ойлосо,  $V$  ны ( $n - r$ ) – ченемдүү вектордук мейкиндик катары түшүнсө болот. Анткени

$n - r$  сандагы эркин тандалган  $x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, \dots, x_n = c_{n-r}$  чечимдери

аркылуу  $r$  сандагы базистик  $x_1, x_2, \dots, x_r$  чечимдерин ар бири

сызыктуу туюнтулат же каалагандай  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n\}$  чечими

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \lambda_{11}c_1 + \lambda_{12}c_2 + \dots + \lambda_{1(n-r)}c_{n-r}, \\
 x_2 &= \lambda_{21}c_1 + \lambda_{22}c_2 + \dots + \lambda_{2(n-r)}c_{n-r}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_r &= \lambda_{r1}c_1 + \lambda_{r2}c_2 + \dots + \lambda_{r(n-r)}c_{n-r}, \\
 x_{r+1} &= c_1, \\
 x_{r+2} &= c_2, \quad (\lambda_{ij} \in R, i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, n - r) \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_n &= c_{n-r}
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

көрүнүштөрдө табылып, жалпы учурда  $n - r$  сандагы эркин тандалган сандардан гана көз каранды деп эсептейбиз  $X = X(c_1, c_2, \dots, c_{n-r})$ .

$(n - r)$  ченемдүү  $V$  сызыктуу мейкиндигин каноникалык базиси деп  $n - r$  сандагы

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ 1, 0, \dots, 0 \right\} \\ E_2 &= \left\{ 0, 1, \dots, 0 \right\} \\ E_{n-r} &= \left\{ 0, 0, \dots, 1 \right\} \end{aligned} \quad (57)$$

ар бири  $(n - r)$  компоненттерден куралган, вектор - чечимдерин алабыз.

(57) каноникалык базисинен эркин тандалган  $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$  чечимдерин, кезеги менен бирөөсүн 1, калгандары баары нөл деп алуу менен түздүк.

$V$  мейкиндигин каноникалык базисин түзгөн (57) чечимдерин жардамы менен, (56) чечимдеринин арасынан  $n$ -г сандагы төмөндөгүдөй  $X^1, X^2, \dots, X^{n-r}$  чечимдерди бөлүп алууга болот:

$$X^1 = \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad X^{n-r} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,n-r} \\ \lambda_{2,n-r} \\ \vdots \\ \lambda_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Бөлүп алынган (58) чечимдери эки касиетке ээ:

**1<sup>0</sup>.**  $X^1, X^2, \dots, X^{n-r}$  сызыктуу көз каранды эмес системаны түзүшөт.

**2<sup>0</sup>.** (53) бир тектүү теңдемелер системасын каалагандай  $X$  чечими, чечимдердин (58) сызыктуу комбинациясы катарында туюнтулат же каалагандай  $X$  чечимин (58) чечимдери боюнча ажыратып жазууга болот.

Чынында эле, чечимдердин (58) сызыктуу комбинациясы деп, (56) каалагандай  $X$  чечимин алууга болот. Анда  $X = 0$  тривиалдык чечими  $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-r} = 0$  болгондо гана табылары келип чыгып, (58) сызыктуу көз каранды эмес системаны түзөрү белгилүү болот.

Ошондой эле (53) бир тектүү теңдемелер системасын каалагандай  $X$  чечими деп, (56) көрүнүштү эсептесек, анда бул чечимди (58) чечимдерин  $X = c_1 X^1 + c_2 X^2 + \dots + c_{n-r} X^{n-r}$  (59)

сызыктуу комбинациясы катарында жазууга болот.

**5.6.1 Аныктама.** Бир тектүү (53) теңдемелер системасын  $1^0$  жана  $2^0$  шарттарын канааттандырган, саны  $n-r$  болгон каалагандай  $X^1, X^2, \dots, X^{n-r}$  топтордон турган чечимдердин тутуму, бир тектүү (53) теңдемелер системасын чечимдеринин фундаменталдык системасы деп аталышат.

Ошентип  $r = \text{rang}A < n, r \neq 0$  болгон учурда чечимдердин фундаменталдык системасы табылып, бир тектүү теңдемелер системасын жалпы чечими фундаменталдык система аркылуу (59) көрүнүштө туюнтулат. (59) туюнтуусун векторлорду базистик система боюнча ажыратып жазууга салыштырса болот.

**19-мисал.**

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

теңдемелер системасын чечимдеринин фундаменталдык системасын аныктап, жалпы чечимин тапкыла.

**Чыгаруу:**  $\triangleright$  Берилген  $n = 5$  белгисиздүү  $m = 4$  теңдемелер системасын матрицасын рангын аныктайлы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Биринчи жолчо менен 4 - жолчону алмаштырып жаздык. Кийинки кадамда 1- жолчону өзүндөй калтырып, 2 - жолчодон 2 ге көбөйтүлгөн 1 - жолчону кемитип, 3- жолчодон 1 - жолчону кемитип, 4 – жолчодон «-4» кө көбөйтүлгөн 1- жолчону кемитип жазабыз. Натыйжада

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \text{ матрицасына ээ болобуз. Анын 3, 4 -}$$

жолчолорун экиге бөлүп жиберген соң, алардан экинчи жолчону кемитсек, анда

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ келип чыгып, } r = \text{rang}A = \text{rang}\tilde{A} = 2 < n = 5$$

болот.

Демек, базистик минор деп  $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$  алсак, берилген

теңдеменин  $x_1, x_2$  базистик чечимдери жана  $x_3, x_4, x_5$  эркин тандалуучу чечимдери болот. Теңдемени базистик чечимдерге карата кыскартып жазганда

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8x_3 - 2x_4 - x_5, \\ 2x_1 - 2x_2 = 3x_3 + 7x_4 - 2x_5 \end{cases} \text{ келип чыгып, эркин чечимдерге}$$

$x_3 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_2$  каалагандай сандык маанилерди берсек,  $x_1, x_2$

белгисиздери табылат. Ал үчүн 1- теңдемени 2 ге көбөйтүп экинчисине кошуп,

$$8x_1 = 19c_1 + 3c_2 - 4c_3, \text{ же}$$

$$x_1 = \frac{19}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3$$

ээ болобуз. Аны биринчи теңдемеге коюп,

$$x_2 = -3\left(\frac{19}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3\right) + 8c_1 - 2c_2 - c_3 = \frac{7}{8}c_1 - \frac{25}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3$$

жалпы чечимди табабыз. Аны

$$X = \begin{pmatrix} \frac{19}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3 \\ \frac{7}{8}c_1 - \frac{25}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ мамыча көрүнүштө жазып, } c_1, c_2, c_3 \text{ эркин}$$

тандалган сандарына кезеги менен чечимдердин үч ченемдүү сызыктуу мейкиндигине каноникалык базис болушкан

$$E_1 = \{1, 0, 0\}, E_2 = \{0, 1, 0\}, E_3 = \{0, 0, 1\} \text{ компоненттерин маанилерин}$$

берип, жалпы чечимден

$$X^1 = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; X^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -25 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; X^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ чечимдердин фундаменталдык}$$

системасын бөлүп алабыз. Жалпы чечим, бул чечимдердин фундаменталдык системасы боюнча  $X = c_1X^1 + c_2X^2 + c_3X^3$  көрүнүштө сызыктуу комбинация болуп туюнтулат, б.а. чечимдердин фундаменталдык системасы боюнча ушундай көрүнүштө ажырайт. Мындай ажыроо, векторлордун мейкиндигиндеги каалагандай векторду мейкиндиктин базиси боюнча ажыратып жазууга окшош көрүнүш экендигин дагы бир жолу эскертип кетебиз.

## Көнүгүүлөр



5.1.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$  матрицаларын  $3A + 2B$  сызыктуу

комбинациясын тапкыла.

Жообу:  $\begin{pmatrix} 11 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -12 \end{pmatrix}$ .

5.2. Матрицаларды көбөйткүлө:

а)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$  б)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$  в)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

г)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$  д)  $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ -38 & -126 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$

е)  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$  ж)  $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix};$

з)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix};$

5.3. Берилген матрицаларга көбөйтүүдө орун алмаштыруучулук шартын канааттандыруучу матрицаны тапкыла.

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$  б)  $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix};$  в)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$

**Жооптору:** 5.2. а)  $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix};$  б)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$  в)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$  г)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix};$

д)  $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$

$$е) \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}; \text{ ж) } (31); \text{ з) } \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

5.3. а)  $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$ , мында  $a, b$  каалагандай сандар;

б)  $\begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$ , мында  $a, b$  каалагандай сандар; в)  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ , мында

$a, b, c$  каалагандай сандар.

5.4. Төмөндөгү матрицалардын тескери матрицасын тапкыла.

а)  $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ; г)  $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ ; д)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Жообу: а)  $\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$ ; в)  $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

г)  $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ ; д)  $\begin{pmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{pmatrix}$ .

5.5. Матрицалык теңдемелерди чыгаргыла.

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ ; б)  $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ ;

в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ .

Жообу: а)  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ ; в)  $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ .

5.6. Тескери матрицасын тапкыла.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Жообу: а) } -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 32 & 14 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 25 & 11 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.7. Матрицалардын рангын аныктагыла.

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 25 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}.$$

Жообу: а) 2; б) 2; в) 3; г) 3; д) 2.

5.8. Теңдемелер системасын чыгаргыла.

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 4y = 1, \\ 3x + 4y = 18; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16, \\ 5x + 2y + z = 16; \end{cases} \quad \text{д) } \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1; \end{cases} \quad \text{ж) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2; \end{cases}$$

$$\text{з) } \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1; \end{cases} \quad \text{и) } \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3; \end{cases}$$

Жообу: а)  $x = 2, y = 3$ ; б)  $x = 2, y = -1, z = 1$ ; в)  $x = 1, y = 3, z = 5$ ;

г)  $x = 3, y = 1, z = -1$ ; д)  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$ ; е)  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ ;

ж)  $x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 1;$

з)  $x_1 = -1 - c_1 + 2c_2, x_2 = -3 + c_1 + 2c_2, x_3 = c_1, x_4 = c_2;$  и) биргелешкен эмес.

5.9. Бир тектүү теңдемелер системасын чечимдерин фундаменталдык системасын жана жалпы чечимин тапкыла.

а)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$  в)  $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$

г)  $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$  д)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$

е)  $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$  ж)  $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$

з)  $\begin{cases} -x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$  и)  $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$  Жообу:

а)  $x = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix};$  б)  $c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$  в) тривиалдык гана чечимге ээ;

г)  $X = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix};$  д)  $c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$  е)  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix};$  ж)  $X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$

з)  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$  и)  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

## КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАР

1. Асанов А, Булатаева В.В. Руководство к решению задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – Бишкек: Университет «Дастан», 1999. - 88 с.
2. Бекбоев И. Жогорку математиканын жалпы курсу. – Бишкек: «Педагогика», 2000.
3. Бөрүбаев А.А., Шабыкеев Б., Бараталиев К. Математикалык анализ. 1-2 – бөлүктөр. – Бишкек: «Мектеп», 2002.
4. Каримов С. Элементардык функциялар. – Фрунзе: «Мектеп», 1971. - 120 б.
5. Сопуев С. Методические указания и упражнения по теории аналитических функций. 1- 2 – части. – Ош: Ошский госпединститут, 1989. - 9,75 п.л.
6. Рафатов Р, Асанов А. Комплекс сандар, функциялар жана дифференциалдык теңдемелер. – Бишкек: «Манас» университети, 2007. - 230 б.
7. Усубакунов Р. Дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр курсу (1,2 – бөлүктөр). – Фрунзе: «Мектеп»
8. Демидович Б.П. и другие. Сборник задач по математике для втузов. – Москва: «Наука», 1981. - 464 с.
9. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих. – Москва: «Наука», 1970. - 560 с.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: «Наука», 1968. - 497 с.
11. Краснов М.Л. и другие. Вся высшая математика, т -1. – Москва: «УРСС», 2002. - 328 б.
12. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М: «Наука», 1974. - 450 с.
13. Атаманов Э.Р., Мамаюсупов М.Ш. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: «Илим», 1990. - 100 с.

14. Мамаюсупов М.Ш. Инженердик адистиктерде математиканы окутууга коюлуучу айрым талаптар жөнүндө. – Бишкек: Журн. «Известия КАО», 2005, № 3. - С. 80-81.
15. Мамаюсупов М.Ш. Студенттерге жаратылыш кубулуштарын математиканын тилинде түшүндүрүүнү үйрөтөлү. – Ош: Журн. ОшКУУ «Наука. Образование. Техника», 2007, № 3. - С. 161-163.
16. Мамаюсупов М.Ш. Студенттердин кесиптик билимдерин өздөштүрүүсүндө математиканын орду. – Ош: Журн. «Вестник ОшГУ», 2008, № 1. - С. 74-77.
17. Мамаюсупов М.Ш. Жогорку математиканы окутуу программасына айрым өзгөртүүлөрдү киргизүү жөнүндө. – Ош: Журн. «Известия ОшТУ», 2008. - С. 188-192.
18. Аттокурова А. Дж., Барышникова Т.Л., Мамаюсупов М.Ш. Математиканы интерактивдүү ыкма менен окутуу маселелери. – Ош: «ЦП. Максимум», 2008. - 94 б.

Мамаюсупов Маккамбай Шеранович

ЖОГОРКУ МАТЕМАТИКА БОЮНЧА ОКУМА

(I – бөлүк)

Электрондук окуу китеп

Ош мамлекеттик университетинин жогорку математика  
кафедрасынын 2010-жылдын 25- майындагы чечими менен  
окуу китеби катарында басмага сунушталган.

Көлөмү 335 бет